UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

MÁSTER en PROFESORADO de EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

Especialidad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Máster

Exploración de las ideas en Probabilidad Condicionada de alumnos de 4º E.S.O

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Cádiz

Puerto Real, Febrero de 2018

Purificación Rastrollo Casimiro

Tutor: Jose María Cardeñoso

Dña. Purificación Rastrollo Casimiro, estudiante del Máster Oficial en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas por la especialidad matemáticas, impartido en la Universidad de Cádiz en el curso académico 2017-2018 como autora de este documento académico, titulado:

Exploración de las ideas en probabilidad condicionada de alumnos de 4º E.S.O

y presentado como Trabajo Fin de Máster bajo la tutela de Dr. Jose María Cardeñoso Domingo, para la obtención del título correspondiente,

DECLARA QUE:

El contenido de este Trabajo Fin de Máster es original y de su autoría, asumiendo las responsabilidades que de cualquier plagio detectado pudieran derivarse. No obstante, quiere hacer notar que, como en todo trabajo académico, a lo largo del trabajo se incluyen ideas y afirmaciones aportadas por otros autores, acogiéndose en tal caso al derecho de cita.

En Puerto Real, a de Febrero de 2018

Fdo. : Purificación Rastrollo Casimiro

Índice

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Resumen

La enseñanza de la Probabilidad en la educación básica obligatoria actual es insuficiente. Por ese motivo, el objetivo de este trabajo es hacer un acercamiento entre los estudiantes y la probabilidad a través del uso de la paradoja de Monty Hall, basada en el famoso programa de televisión llamado "Hagamos un trato", y cuyo nombre se debe al del presentador del mismo. La investigación está centrada en alumnos de 4º E.S.O de Matemáticas Académicas. Usando esta paradoja, pretendemos conocer el conocimiento de los estudiantes sobre probabilidad condicional. Para este objetivo, usaremos el portafolio a través del cual recogeremos todas las respuestas y razonamientos de los estudiantes. Este portafolio está dividido en tres etapas, las mismas en las que hemos dividido la intervención en el aula, y las cuales ayudarán a los alumnos a responder a la pregunta inicial que se les planteará: ¿cuál es la mejor opción: mantener la elección de la puerta inicial o cambiar cuando el presentador te da la oportunidad de hacerlo? Con todos los resultados intentaremos dar una respuesta al sentido de este trabajo en relación al conocimiento en probabilidad de los estudiantes.

Summary

The teaching of probability in the actual basic education is lacking. For that reason, the aim of this work is to make an approach between students and probability through the use of Monty Hall paradox, based on a famous American TV show called "Let's make a deal". The name of that paradox received the name by the host. The investigation is focus on 4th grade of obligatory education pupils. Using this paradox, we pretend to figure out the knowledge of students about conditional probability. For that purpose, we will use a portfolio by which we will collect all the answers and procedure which the students make. This portfolio has different question for the three periods that the activity will have, and which will help to the pupils to answer an initial question set out: ¿what is the best option: stick with your initial election or change it when de host give you the opportunity of that? With all the results we will try to give an answer of our initial question about the knowledge in probability by the students.

0. Introducción

Este trabajo consiste en un análisis de los conocimientos probabilísticos de estudiantes de educación secundaria obligatoria a través de la paradoja de *Monty Hall*.

El principal objeto de estudio que se encuentra implícito tras este problema es el de la probabilidad condicional y que se trata de la principal fuente de error al intentar dar solución a dicha paradoja. Son varias las soluciones correctas y las diferentes maneras en las que esta puede venir dada. Por un lado, de manera intuitiva y por otro lado de manera más formal o matemática. Tal y como expresan Díaz & de la Fuente (2005), la probabilidad condicionada juega un papel importante sobre la creencia que tenemos sobre la ocurrencia o no de determinados sucesos, ya que nos permite cambiarla en función de la nueva información que vamos obteniendo.

Este trabajo surge a través de mi interés por la Probabilidad y la estadística y al percibir, cuando estudiaba el grado en Matemáticas, las carencias que alumnos de la E.S.O tenían al respecto. Las pude percibir en la exposición de esta paradoja durante las jornadas de la semana de la Ciencia y la Tecnología en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz, en el campus de Puerto Real, que tuvo lugar del 2 al 10 de noviembre de 2016. En ella, a través de un attrezzo que simulaba las condiciones del juego, los diferentes grupos de alumnos de distintos centros de la provincia se convertían en jugadores de concurso durante el trascurso del taller. Se realizaban varias repeticiones del experimento, y en una pizarra se iban apuntando los éxitos y los fracasos que se iban teniendo respecto al mismo, así como el número de repeticiones que se habían realizado. Los alumnos cursaban 4º de la E.S.O, lo cual hacía pensar que sus conocimientos probabilísticos eran amplios en este sentido. Sin embargo, se podía percibir como las soluciones y las diferentes opciones que iban tomando, así como sus razonamientos estaban totalmente basados en la intuición y en la mayoría de ocasiones eran erróneas. La mayoría de alumnos se dejaban llevar por creencias o conclusiones falsas y eran pocos los que se atrevían a cambiar la elección de la puerta cuando se le ofrecía la ocasión. En el caso de que lo hicieran, no eran capaces de dar un correcto razonamiento a su decisión. Además, cuando se explica al final del taller, desde un punto de vista más formal, el porqué de solución correcta, muchos no comprendían muchos aspectos. En esos casos, se ponía un caso exagerado con cien puertas, donde en noventa y nueve de ellas había cabras, y donde tras una de ellas se encontraba el coche. En esos casos llevados al extremo muchos comprendían lo que esta paradoja entrañaba, aunque he decir que debido al poco tiempo del que se disponía, no era posible poder afianzar o hacer reflexionar a los alumnos con detenimientos sobre la actividad. Por ello, y con el objetivo de poder sacar conclusiones fundamentadas y no basadas en mi propia intuición u observación, se realiza este trabajo de investigación, donde vamos a llevar esta actividad al aula. Para ello, lo haremos de manera física y simularemos el problema con los alumnos, pero también nos parece interesante que cada uno de ellos de manera individual obtenga unas conclusiones previas y pueda reflexionar al respecto. Para este fin, hemos creado una aplicación a través del software libre Geogebra, pues nos parecía una oportunidad muy buena para el trato con tecnologías de los alumnos y que hace el desarrollo de la actividad más atractiva y motivadora para los alumnos. Para la recogida de datos usaremos un portafolio, donde quedará recogida la información, y que posteriormente analizaremos y del cual obtendremos una serie de conclusiones.

Este trabajo comienza con una contextualización del problema donde se ponen de manifiesto todos los factores que influyen en el desarrollo de eta práctica. Y donde describimos investigaciones y experimentos realizados con anterioridad y sobre los que no apoyaremos para la realización del nuestro propio, sirviéndonos estos como base y fundamentación teórica del mismo.

Por último, de la forma en la que la paradoja será llevada a cabo se pretende que este trabajo sea visto como una forma no sólo de poder acercar las Matemáticas a los estudiantes, sino un ejemplo para futuros docentes en el cambio de metodologías entorno a nuestra materia. Además, espero que pueda servir de motivación para aquellos que encuentran en la Probabilidad una rama de las Matemáticas secundaria o de menor importancia, y que haga que quede relegada a un segundo plano en la educación de los estudiantes en todas las etapas.Para exponer todo lo anterior, hemos comenzado con un primer capítulo donde podemos encontrar toda la fundamentación teórica. En ella hemos incluido todos los estudios e investigaciones previas al desarrollo de la nuestra propia, así como de los instrumentos y recursos que vamos a tratar en nuestro caso. En cada una de ellas, nos hemos basado para el desarrollo de la estructura y la forma de presentación de nuestra investigación, tanto de estudios previos en probabilidad condicionada y la paradoja de *Monty Hall* como otros instrumentos que se encuentran alrededor de la misma, como son la propia paradoja, el uso de aplicaciones en el aula y la simulación, además de preguntarnos por la Probabilidad en la educación actual. Asimismo, en dicho capítulo hemos diferenciado entre la importancia de la probabilidad en la enseñanza actual, el uso de las aplicaciones y la simulación en el aula, los usos educativos de las paradojas, la paradoja de *Monty Hall* junto con sus soluciones distintas y, por último, antecedentes teóricos y posibles dificultades.

En un segundo capítulo, hemos incluido la justificación del estudio en cuanto a los objetivos. Hemos distinguido entre objetivos generales y específicos, y que nos servirán de guía durante el desarrollo de la investigación. En este mismo capítulo hemos en incluido las cuestiones que nos hacemos a cerca de la actividad que vamos a llevar a cabo.

En el tercer capítulo, se describe toda la secuenciación y diseño metodológico que hemos desarrollado, donde describimos a los estudiantes, la metodología, la secuenciación y los instrumentos de presentación de la paradoja. Además, podemos encontrar en este capítulo el sistema de categorías que hemos realizado para realizar el análisis de los resultados que hemos obtenido. También hemos incluido en este capítulo, el enfoque de la investigación, además de las técnicas e instrumentos de recogida de los datos, como el portafolio y el diario. En este capítulo, hemos incluido un subapartado donde podemos encontrar el análisis de los datos que se recogerán tras la intervención en el aula.

Para finalizar en el capítulo 4 analizaremos todos los aspectos recogidos como las soluciones, la influencia del número de puertas, la expresión de los argumentos, entre otros, para cada uno de los grupos, mostrando tablas de datos y diagramas que nos ayuden a la comprensión de los mismos.

En el capítulo 5, hemos realizado una exploración de resultados prestando atención a los objetivos y cuestiones de investigación así como las tendencias de pensamiento que hemos establecido y las conclusiones que finales que obtenemos tras todo el proceso en relación con los estudios realizados en la materia.

En el capítulo 6 haremos una reflexión y conexión con los aspectos y conceptos vistos durante el desarrollo anterior del Máster en Educación Secundaria Obligatoria, enseñanza de Idiomas y Formación profesional, realizado con anterioridad y que supone los conocimientos previos que nos han permitido realizar este Trabajo de Fin de Máster.

Se incluye finalmente la bibliografía usada para la realización de este trabajo, y las referencia a todos los autores que han sido citados a los largo de la misma.

En los anexos incluidos al final de este trabajo se encuentran, en el primero de ellos encontramos imágenes de la aplicación que hemos realizado con Geogebra, en el segundo el portafolio proporcionado a los estudiantes para la actividad. En el tercero, hemos incluido el diario donde hemos recogido las percepciones, errores y aspectos fuera de la metodología prevista que tuvieron lugar en el aula. En el Anexo IV, encontramos los diagramas que comparan los distintos ítems que hemos estudiado, desde una perspectiva de evolución a lo largo de las tres etapas. Han sido incluidos en anexos, por falta de espacio dentro del cuerpo del documento.

1. Fundamentación teórica

1.1. La Probabilidad en la enseñanza matemática actual

Como manifiestan Ball, Hill & Bass (2005): “How well teachers know mathematics is central to their capacity to use instructional materials wisely, to assess students’ progress, and to make sound judgments about presentation, emphasis, and sequencing” (p.14). Es decir, el conocimiento que los docentes tengan sobre matemáticas tiene una repercusión directa sobre el material y la elección del mismo, el progreso de los estudiantes y el hincapié o secuenciación que se lleve a cabo, a la hora de exponer un tema en matemáticas.

En la rama de las matemáticas que nos compete, la Probabilidad, es potenciada en el curriculum desde los 6 años (MEC, 2006), debido a su importancia en la vida cotidiana y su aplicación a otros campos de la ciencia. En Educación Secundaria Obligatoria (Junta de Andalucía 1992 b) las propuestas son mucho más detalladas, incluyendo dentro del bloque de tratamiento de la información, las siguientes orientaciones: “Estimación y medición de la Probabilidad de distintos tipos de sucesos mediante experimentación reiterada y, aplicando la Ley de Laplace, en los casos equiprobables y Resolución de problemas de probabilidad condicionada (p.19, citado en Batanero, 2006, p.3). Según afirma Cardeñoso & Azcárate (2004), su integración en la estructura del pensamiento implica la modificación del modelo determinista como única referencia; es decir, no sólo supone un cambio curricular sino que su comprensión implica necesariamente una modificación de la lógica causal dominante (p.15). Por ese motivo, un desconocimiento o la falta de interés por parte de los docentes hacia la misma, tiene una repercusión directa en estudiantes de educación secundaria, induciéndoles a error en muchas ocasiones, y haciendo que sus conocimientos probabilísticos estén basados en la intuición. En otras ocasiones, es el pensamiento determinista predominante en los procesos educativos (Azcárate, 2006, citado en Osorio, Suárez & Sandoval, 2013, p.128) el que fomenta estas conclusiones de los estudiantes.

El desconocimiento en profesores es lo que Ball, Lubienski & Mewborn (2001) denominan *conocimiento matemático para la enseñanza*, y que abarca desde el desconocimiento de los docentes nombrados anteriormente, hasta los ejemplos utilizados en las explicaciones, las concepciones previas de los aprendices, y las diferentes maneras de resolver un problema; entre otros. Así, para que una estrategia formativa pueda facilitar la construcción de un conocimiento profesional significativo se debe articular en torno a las concepciones de los futuros profesores (Cardeñoso & Azcárate, 2004).

Por lo tanto, podemos afirmar que existe una clara relación entre las concepciones de los profesores y sus experiencias durante el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje

(Serradó, Azcárate & Cardeñoso, 2005). Esto lleva a que, como reflejan algunos autores como Pierce & Chick (2011), algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, pues su interés es contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. (Batanero, 2011). Al respecto, se encuentra el trabajo de Fernándes & Barros (2005), que muestra las dificultades de 37 profesores portugueses de educación secundaria a la hora de diferenciar entre probabilidad condicionada y simple.

Por ello, un cambio de punto de vista que propicie la creación de retos para ellos, permite hacerles reflexionar sobre conceptos matemáticos y más concretamente, de la Probabilidad; con el fin de construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo (Batanero, Contreras, Cañadas & Gea, 2012), es importante de cara a la mejora de la enseñanza de la Probabilidad en las aulas en todas las etapas educativas.

Para finalizar, destacar la importancia que tiene la contextualización de la enseñanza de la Probabilidad en el aula así como la participación del alumnado en metodologías que fomenten el aprendizaje significativo. Todo ello:

> […] supone un proceso de innovación que involucra el tratamiento de este nuevo conocimiento, ajeno a gran parte del profesorado. Tratamiento que demanda nuevas formas de hacer en el aula con estrategias metodológicas que permitan una mayor participación del alumno, como el trabajo con proyectos, con escenarios, en relación directa con aspectos del entorno. (Azcárate & Cardeñoso, 2011, p.793)

Un ejemplo de ello es lo que se pretende dar también en este trabajo, dejando ver como la introducción de los conceptos matemáticos en el aula pueden realizarse de manera diferente, divertida y cercana a los alumnos, de manera que éstos se encuentren motivados hacia la actividad.

1.2. Uso de apps y simulación en el aula

Muchas de las dificultades que nos encontramos en Probabilidad se deben a que no se pueden llevar a cabo los experimentos o las probabilidades que en ellos influyen. Por ello, el uso de simulaciones y apps cobra importancia en este sentido.

Por un lado, el uso de aplicaciones o recursos tecnológicos, según Rodríguez (2000) son de relevancia en el sentido de que, “una aplicación informática, que soportada sobre una bien definida estrategia pedagógica, apoya directamente el proceso de enseñanza-aprendizaje constituyendo un efectivo instrumento para el desarrollo educacional del hombre del presente siglo” (p. 54, citado en Osorio, Suárez & Uribe, 2013, p.129), creemos que el uso de aplicaciones móviles, o en nuestro caso, de pequeños programas que permitan su manejo, por parte de los alumnos de manera individual, tendrá efectos positivos sobre dicho proceso.

La forma de trabajo que vamos a llevar a cabo requiere de la simulación de un determinado experimento durante la clase, para poder posteriormente obtener conclusiones y reflexionar sobre lo acontecido. Según Trevethan, YumiKataoka & Oliveira (2010):

> A través del proceso de modelación, el alumno puede evaluar no solamente el modelo, sino también su propio conocimiento sobre el fenómeno en sí y observar con mejores bases teóricas el fenómeno de convergencia. Esto es, los alumnos aprenden construyendo su propio conocimiento y dándole sentido (p.75).

Entendiéndose por modelación como "[…] un proceso que es desencadenado por el alumno cuando le es solicitado el reconocimiento del modelo probabilista que mejor representa e interpreta la situación de la realidad que él quiere estudiar" (Coutinho, 2001, citado en Trevethan, YumiKataoka & Oliveira, 2010, p.76).

Nuestra simulación estará basada en tres aspectos destacados por Bielher (1991), la primera es la que la representación suele ayudar a los estudiantes a pensar en modelos concretos antes de ser capaces de generalizar a espacios probabilísticos abstractos, la segunda es que los simuladores ofrecen la posibilidad de procesar datos y dar una estimación, y por último, los estudiantes deben primero construir un entendimiento coherente de la situación como modelo antes de hacerlo de manera computacional (Batanero, Contreras, Díaz, y Cañadas, 2014).

A pesar de todo ello, no son muchos los experimentos llevados a cabo en el aula haciendo uso de simulaciones; esto se debe principalmente, a dificultades que en ocasiones presentan. Además requieren una preparación y secuenciación de actividades adecuadas para poder obtener todo el potencial posible de la misma, tal y como afirman Chaput, Girard & Henry, (2008).

En cualquier caso, si la secuenciación de actividades es correcta, la utilidad de este tipo de prácticas en el aula sirve como guía y primer contacto de los alumnos con el problema que se pretende formalizar. Como pone de manifiesto Fischbein (1975) en Batanero, Fernandes & Contreras (2009):

> El uso de programas de simulación permite poner en manos del alumno un nuevo instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo a paliar el problema de la falta de experiencia estocástica y a la mejora de la intuición probabilística que, en general, no se desarrollan espontáneamente (p.52)

Así, la posibilidad de repetición del experimento ayuda al estudiante a sacar conclusiones con mayor facilidad, aunque hay que tener precaución en su uso, pues como veremos posteriormente en las posibles dificultades que los estudiantes puedan encontrar se encuentra la de sacar conclusiones de la actividad con un número bajo de repeticiones de la misma.

Por otro lado, el uso de tecnologías en el día a día de los jóvenes es más que notable, el desarrollo de las mismas en la última década del siglo XXI ha influido no sólo en la enseñanza, sino también en el desarrollo de las matemáticas. Los estudiantes manejan a diario todo tipo de tecnologías y aparatos que les llevan a una obtención rápida de cualquier tipo de información y a estar conectados permanentemente. Debemos tener siempre en cuenta que "Educar es adaptar el individuo al medio social ambiente" (Piaget, 1973, citado en Marín, 1999, p.1). Por ese motivo, presentarles a los alumnos actividades entorno a las matemáticas a través de actividades y aparatos que manejan a diario, les permite ver que estás no están tan alejadas de su día a día. Con todo ello pretendemos que la teoría, así concebida, resulta llena de sentido, plenamente motivada y mucho más fácilmente asimilable (De Guzmán, 2007). Por su parte, de las TIC's se tiene su uso como estrategia efectiva para fomentar el aprendizaje autónomo por parte del estudiante y estimular su interés por los temas de Probabilidad (Osorio, Suárez & Uribe, 2013).

1.3.Usos educativos de las paradojas en Probabilidad

Watzlawick, Helmick & Jackson (1981) definen paradoja como una contradicción que resulta de la deducción correcta a premisas congruentes. (p.173, citado en Martínez, 1999, p.29).

Por su parte, Borin defiende que:

> La resolución de problemas debe ser la metodología elegida para el trabajo con juegos, por ser más adecuada para desarrollar una postura crítica ante cualquier situación que exija una respuesta. Así, cada hipótesis/estrategia formulada o cada jugada desencadena una serie de cuestionamientos como: ¿Es esa la única jugada posible? Si hubiera alternativas, ¿cuál escoger y por qué escoger esta o aquella? Terminado el problema o la jugada, ¿cuáles fueron los errores y por qué se cometieron? ¿Aún es posible resolver el problema o ganar en el juego, si se cambiaran los datos las reglas? (1996, p.10, citado en Trevethan, YumiKataoka & Oliveira, 2010, p.5).

Estando esta reflexión en consonancia con el enfoque que pretendemos darle a nuestra actividad en el aula.

Debido a la naturaleza de la actividad, nuestra práctica se basa en aprendizaje constructivista. Son diferentes investigaciones las que concluyen que el uso de paradojas muestra la riqueza interpretativa que puede tener incorporar este tipo de actividades al aula. Por otro lado, autores como Lesser (1998), defienden lo positivo del uso de paradojas en el aula como fomento de un aprendizaje constructivista.

Nuestra investigación se sitúa en el marco de resolución de problemas probabilísticos a través de paradojas y su simulación en el aula, más concretamente la paradoja de *Monty Hall*. Cuando pretendemos trasmitir un concepto o una relación entre varios de ellos en matemáticas, resulta muy productivo el uso de este tipo de juegos o problemas, ya que nos permite que sea el alumno el que vaya, a través de su propia experiencia obteniendo conclusiones y construyendo los conceptos implicados. Por su parte, Falk & Konold (1992) afirman que, el análisis de paradojas requiere, por parte del que analiza, una conciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta (Contreras, Batanero, Fernandes & Ojeda,. 2010). Los diferentes puntos de vista y las conclusiones a las que los alumnos lleguen, tendrá repercusiones muy positivas en el su aprendizaje de la Probabilidad; debido a la naturaleza de la Probabilidad y su desarrollo a lo largo de la historia.

La dualidad entre la historia y la vida cotidiana que presenta la Probabilidad, tiene también importancia en el aprendizaje de los estudiantes; dado que en los documentos curriculares españoles se incluye el componente histórico como bloque transversal en el currículo de matemáticas, tanto en la educación secundaria obligatoria como en el bachillerato (Consejería de Educación, 2007; 2008; citado en Batanero *et al.*, 2012, p.5). Además, el desarrollo que la Probabilidad ha tenido a lo largo de la historia, donde los conceptos formales que tenemos actualmente han surgido de intentar dar solución a problemas que surgieron en el pasado, es de ayuda a la hora de enfocar las actividades que les presentamos a los alumnos, ya que permite la construcción de los conceptos, de los que hablábamos antes, de una manera más constructiva. Ese constructivismo surge del propio uso de problemas o paradojas para el estudio de la Probabilidad en lo que Gee (2004) denomina *principio del Régimen de Competencias* (citado en Escrich, Gigante & García, 2015, p.5) en el cual el alumno posee diversas opciones para usar sus recursos, de tal manera que no percibe en ningún momento que el reto que tiene delante sea imposible de alcanzar.

A través de esta paradoja los alumnos pueden llegar a ser capaces de elaborar su propia respuesta, desarrollar las intuiciones que puedan tener y que éstas sean modeladas a través de la Probabilidad. La importancia de presentar a los alumnos la Probabilidad de esta forma radica en que, el azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y Probabilidad, como los mostrados en la paradoja (Batanero *et al*., 2012).

Por último, sabemos que la motivación para aprender aumenta cuando sentimos afinidad, interés o pasión por lo que estamos estudiando (Piaget, 1978, citado en Tomlinson, 2005, p.27) Por ello, creemos que el uso de este tipo de problemas en el aula, hace factible que podamos tener acceso a diferentes niveles que encuentren en el aula. De ello se desprende "la necesidad de crear condiciones escolares estableciendo espacios y tiempos que permitan reflexionar de manera conjunta basándose en evidencias o datos reales en un contexto escolar concreto" (Echeita & Sandoval, 2011, p.10). El efecto motivador que este tipo de prácticas tiene sobre los alumnos, les lleva a indagar con mayor interés las cuestiones implicadas en la resolución del problema, según Konold (1994), reforzando el aprendizaje de todo el aparato matemático que se encuentra detrás de una práctica como la que vamos a llevar a cabo en este trabajo.

1.4.Paradoja de *Monty Hall*

La paradoja de *Monty Hall* está basada en el programa televisivo estadounidense *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato). Este programa fue emitido durante los años 1963 y 1986 y debe su nombre a su presentador, *Monty Hall*. En su resolución una mala concepción de la probabilidad condicionada dio lugar a numerosas formulaciones de este problema. Como citan Bohl, Liberatore & Nydick (1995) en Batanero, Fernandes & Contreras (2009), el primer enunciado al respecto es el siguiente:

> Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº2?". ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

De esta formulación se tienen una serie de posibles soluciones correctas que veremos a continuación.

1.4.1. Diferentes soluciones

Las distintas soluciones correctas que esta paradoja tiene pueden ser el razonamiento que algunos de los alumnos hagan al enfrentarse al mismo. Por ello vamos a exponer alguna de ellas.

De manera intuitiva, la solución a la pregunta inicialmente planteada de ¿es mejor mantener tu puerta inicial, o cambiar tu elección?, puede ser explicada como sigue:

- Supongamos que tenemos tres puertas: 1, 2 y 3. Las probabilidades de elegir una puerta donde detrás de ella esté el coche es 1/3 y donde la probabilidad de elegir una puerta donde detrás de ella no se encuentre el premio es 2/3. Es decir, es más probable que inicialmente tu elección no sea la premiada. Supongamos que elegimos la puerta 1, tras ello el presentador abre la puerta 2 o la 3 y nos muestra que no se encuentra el premio tras ella. Por lo tanto, la probabilidad de que esa puerta abierta por el presentador contenga el premio es 0. Puesto que la probabilidad siempre tiene que sumar 1, y la puerta que nosotros elegimos inicialmente, 1, tiene probabilidad 1/3 de esconder el premio tras ella, la otra puerta no abierta aglutina un 2/3 de probabilidades de contener el premio, luego suponiendo que tu elección inicial no fuera la puerta premiada, la probabilidad nos indica que cambiar en ese momento de puerta, maximiza las probabilidades de ganar el premio.

  En resumen, si tu puerta inicial es la premiada, cambiar de puerta te hace perder dicho premio. Sin embargo, si tu elección inicial es una puerta no premiada, cambiar de puerta hace que consigas el premio, pues hay que tener en cuenta que el presentador sabe en todo momento donde se encuentra el premio y nunca abre la puerta premiada. Puesto que es más probable que tu elección inicial no sea la premiada, es mejor opción cambiar de puerta para conseguir el premio.

Batanero, Fernandes & Contreras (2009) propone algunas soluciones intuitivas y otras más formales. De entre las soluciones que no requieren conocimientos probabilísticos previos destacamos la siguiente:

- *Solución intuitiva* :

  El uso de los diagramas de árbol ante las tres puertas donde elegir una puerta con premio es 1/3. Las dos posibles estrategias son: no cambiar de puerta, donde nuestra probabilidad de ganar sigue siendo 1/3; o cambiar de puerta cuando se nos da la oportunidad, en cuyo caso la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente una puerta no premiada 2/3.

Otra posible solución intuitiva sería el dado por Escrich, Gigante & García (2015), donde no se requiere conocimientos muy amplios en Probabilidad. Este razonamiento es el siguiente:

> Teniendo en cuenta que de las tres puertas presentadas, una oculta el coche del premio y las otras dos, cabras, la probabilidad de elegir al inicio la puerta del coche es de 1/3 y de 2/3 la de elegir una de las que ocultan una cabra, es decir, el doble que la de elegir la puerta que oculta el coche. Tras conocer de la mano del presentador una de las puertas que contiene una cabra, lo

más probable es que la puerta que hayamos escogido inicialmente contenga la otra cabra, por tanto, considerando esto, cambiando la puerta seleccionada inicialmente ganaremos el coche.

Por tanto, de acuerdo con este razonamiento, manteniendo la puerta escogida inicialmente tendremos una probabilidad de ganar de 1/3 (la probabilidad que teníamos de elegir la puerta del coche al inicio del juego) y de 2/3 la de perder. Sin embargo, cambiando la puerta escogida inicialmente, la probabilidad de ganar será de 2/3 y de 1/3 la de perder. (p.3)

Por otro lado, este argumento puede ser modelado matemáticamente, identificando los elementos que intervienen en él. Así, tenemos dos soluciones formales dadas por Batanero, Fernandes & Contreras (2009):

- "*Solución formal 1:*

  Identificados los siguientes sucesos:

  A: El jugador selecciona al inicio la puerta que contiene el coche.

  B: El jugador selecciona al inicio una puerta que contiene una cabra.

  C: El jugador gana el coche.

  Calculamos la probabilidad de ganar el coche P(C):

  $P(C) = P((C\cap A) \cup (C\cap B) = P(C\cap A) + P(C\cap B) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)$

  Finalmente, teniendo en cuenta que, por aplicación de la Regla de Laplace:

  $$P(A) = 1/3 \text{ y } P(B) = 2/3,$$

  pues hay una sola puerta que oculta un coche y dos, que ocultan cabras, calculamos la probabilidad de ganar en función de la estrategia del jugador:

  Jugador que nunca cambia: En este caso $P(C/A) = 1$ y $P(C/B) = 0$. Por lo tanto, $P(C) = 1/3$.

  Jugador que siempre cambia: En este caso $P(C/A) = 0$ y $P(C/B) = 1$. Por donde, $P(C) = 2/3$.

- *Solución formal 2:*

  Sea $\xi: (\Omega\ \ ,P)\rightarrow\{1,2,3\}$ la variable aleatoria que asigna un numero de puerta (aquella detrás de la cual se encuentra el coche). Esta variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme y son estocásticamente independientes. Sea $\varphi: (\Omega'', P'') \rightarrow \{n\}$ la variable aleatoria número de la puerta que abre el presentador y que dependerá de las anteriores. Si $\eta=\xi$ (el concursante elige el coche), entonces hay dos posibles valores con probabilidad. (Los números de las dos puertas no elegidas por el concursante). En caso contrario, solo hay un valor, con probabilidad 1 (el número de la puerta sin coche). La probabilidad que el concursante se lleve el coche bajo el supuesto que él no cambia de puerta es entonces $P(\eta=\xi)=\frac{1}{3}$. La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que el cambia de puerta es entonces $P(\eta \neq \xi)=\frac{2}{3}$." (p.13)

Destacar también que son numerosos los objetos matemáticos que influyen tanto en el desarrollo de la paradoja como en sus soluciones.[1]

1.5. Antecedentes: investigaciones previas

Existen estudios previos que han tratado el concepto de la probabilidad condicionada presente en la paradoja de *Monty Hall*. Uno de ellos es el llevado a cabo por Contreras Batanero & Fernández (2010). Desde un punto de vista de la semiótica y la paradoja mencionada, pretenden que se exponga a los estudiantes ante este concepto, con el fin de romper con intuiciones o posibles creencias en la asignación de probabilidades que los alumnos puedan tener al respecto. El análisis de esta paradoja, nos proporcionan posibles dificultades que se pueden encontrar en los razonamientos de los estudiantes. Será por tanto este, uno de los estudios de referencia en el desarrollo de nuestra investigación, al poner de manifiesto tanto posibles dificultades, como un análisis de la solución a la paradoja desde diferentes puntos de vista, dando lugar a posibles resoluciones que los alumnos puedan dar a la paradoja planteada, además de hacer un desarrollo de los objetos que influyen en las respuestas de los estudiantes y que nos servirá de base para establecer un sistema de categorías posteriormente. La paradoja en es presentada en esta investigación como una herramienta en la que se pone de manifiesto conceptos de la probabilidad como la probabilidad condicionada a partir de una aplicación que permite simular el experimento tantas veces como el alumno necesite.

En el desarrollo de este estudio de la paradoja de *Monty Hall*, son varios los objetos y conceptos probabilísticos implícitos en la misma. Fundamentalmente, cabe destacar la probabilidad condicionada sobre la que existen estudios de entre los cuales destacamos el realizado por Fischbein (1975), quien trató de demostrar que los niños tienen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la instrucción para la mejora de estas intuiciones. (Batanero, 2013, p.4).

En relación a los alumnos, son numerosos los estudios que se han realizado para estudiar las ideas intuitivas que los alumnos tienen sobre probabilidad condicionada y probabilidad conjunta. Ejemplo de ello es el estudio realizado por Fernandes, Correia & Contreras (2013) en el que, a través de una encuesta a estudiantes de primaria, observaron como un porcentaje bajo de alumnos daban una respuesta correcta a los ítems establecidos en la encuesta para estudiantes de 9 años. Las ideas presentes en este estudio se encontraban en torno a elementos de independencia, probabilidad condicional y probabilidad en general, a través de cuatro

[1] Contreras García, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral, inédita. Granada: Universidad de Granada.

ítems sobre el experimento de obtención de bolas de una bolsa con y sin reposición. Estudio similar, pero en este caso relacionando la probabilidad condicionada y la independencia de sucesos, es el realizado por Correia & Fernandes (2013), obteniendo conclusiones similares al anterior. En la misma línea, y para alumnos de edad de 17 años de colegios de Portugal, Fernandes, Nascimento, Cunha & Contreras (2011) obtienen una conclusión similar a la de estudios realizados con anterioridad, es decir, los estudiantes poseen un concepto poco profundo de la probabilidad condicionada. En un estudio realizado por Edo (2014) con alumnos de 15 años se muestra como los alumnos son capaces de dar la solución correcta a probabilidades condicionales pero describiéndolas como si fueran probabilidades conjuntas (Huerta & Arnau 2017, p.91).

De igual forma, el estudio de la probabilidad condicionada se ha realizado con estudiantes de Psicología y futuros profesores de Matemáticas, tal y como muestran Batanero, Contreras & Díaz (2014) en su trabajo, donde se observa como resultado algunos sesgos en la comprensión de la probabilidad condicional, como es el de que el suceso que condiciona suceda después del suceso condicionado, y que como destacan, para el caso de profesores de Matemáticas, puede tener especial repercusión en el futuro.

Por su parte, trabajos como el de Díaz, Batanero & Contreras (2010) muestran vías para mejorar el concepto de probabilidad condicionada tanto en alumnos como en profesores. Entre las ayudas que proporcionan se encuentra el uso de aplicaciones y de paradojas, como la de *Monty Hall*.

Por último destacar, otros autores que han realizado estudios al respecto como son por un lado el estudio realizado por Lecoutre y Durand (1988). En él participaron 342 alumnos de 14 a 18 años de edad, y se concluye que los alumnos tienden a considerar que “los acontecimientos de carácter aleatorio son por naturaleza equiparables” (citado en Correia & Fernandes, 2013, p.8).

Por otra parte, si nos referimos a futuros docentes de matemáticas, sobre una muestra de 583 estudiantes para profesor de secundaria de matemática, de la provincia de Mendoza en Argentina, Cardeñoso et al. (2017) afirman que "menos de la mitad de los alumnos realizan una asignación probabilística consistente con la otorgada por los expertos como sucesos con asignación baja y alta ... el uso de la equiprobabilidad es mayor en el grupo de participantes asociados a la Tendencia al Determinismo y a la Incertidumbre, que son las que manifiestan mayor falta de concepciones probabilísticas formales." (pg.160).

Por otro lado, destacar Polaki (2005) en su estudio concluyó que los alumnos de la enseñanza básica “presentan a menudo conjuntos de resultados incompletos […] basadas en raciocinios subjetivos (como la preferencia personal) o estrategias de ensayo" (Citado en Correia & Fernandes, 2013, p.8). También destacan el papel que juega el espacio muestral y que veremos a continuación en nuestras posibles dificultades que entraña la paradoja que presentamos.

1.5.1. Antecedentes teóricos

El lenguaje usado en el desarrollo de la actividad es de importancia e influyente en el proceso de reflexión del alumnado. De esa forma según afirma Godino (2002), "dependiendo de las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional." (p.7). Y de ello se desprenden conceptos, argumentaciones, conclusiones y situaciones de los alumnos, que en nuestro deber como docentes, debemos saber conducir y resolver con éxito para el mayor beneficio posible y para que resulte un ejercicio lo más fructífero posible para los estudiantes.

Respecto al caso de la paradoja de *Monty Hall* que nos ocupa, existen trabajos que realizan un análisis del mismo, y que pasamos a describir. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por Batanero, Fernandes & Contreras, (2009) donde pone de manifiesto los siguientes objetos matemáticos para dicha paradoja, analizando el significado que estos tienen en la situación y asociándolos con las diferentes soluciones dadas con anterioridad. Estos son:

- El problema inicial de *elección de la puerta*.
- *Lenguaje*, donde incluye el *lenguaje verbal* en la explicación del problema, el l*enguaje gráfico* que suele venir dado en forma de diagrama de árbol. También el lenguaje para expresar los sucesos y probabilidades, *lenguaje simbólico;* el lenguaje usado a la hora de expresar las probabilidades de cada suceso, *lenguaje numérico: probabilidades;* el lenguaje para expresar el resultado del experimento, *lenguaje numérico: frecuencias;* y por último, el relacionado con los iconos que representan a los sucesos y resultados.
- *Conceptos y definiciones probabilísticas*, que engloba conceptos de la probabilidad básicos para el desarrollo de la actividad como son el de experimento aleatorio, en la selección de puertas, en la puerta que abre el presentador y el premio ganado; suceso; espacio muestral; experimento compuesto, en la composición con experimento anteriores; frecuencia relativa; convergencia; unión de sucesos; probabilidad clásica; probabilidad frecuencial; probabilidad condicional, entre otros.
- *Procedimientos,* como son el cálculo de probabilidades desde un punto de vista intuitivo, formal, de frecuencias o mediante representaciones gráficas.
- *Proposiciones,* en relación con la probabilidad simple y condicionada, cuando se produce una restricción del espacio muestral. También el hecho de que la frecuencia converge a la

probabilidad, en la experimentación sucesiva de paradoja y que guarda relación con la Ley de los Grande Números; el Teorema de la Unión y el Axioma de la Unión.

- *Argumentos*, que son clasificados entre deductivo o empírico, en el caso de que se realice una demostración o una comparación de resultados. (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009, p.13)

Nos apoyaremos en Agnelli & Peparelli (2011) a la hora de identificar las etapas dentro del proceso de realización del experimento. En su trabajo realizan un análisis de diferentes paradojas y su impacto en el estudio de la probabilidad. Entre ellas encontramos la de *Monty Hall* y consideran:

- Distinguir entre información pre y post experimental.
- De una configuración y descripción adecuada de espacios muestrales.
- Recursos tales como diagramas de árboles y notación conjuntista.
- Asignación de probabilidades por etapas.
- Diferenciar entre probabilidad condicional y no condicional
- Realización de simulaciones como instrumento reafirmatorio de lo analítico y no necesariamente supletorio. (p. 5)

En particular, vamos a prestar especial atención a la investigación realizada por Cardeñoso (2001), citado en Moreno, Cardeñoso & González-García (2014), donde a través del estudio de las concepciones en Probabilidad de 598 profesores de primaria en activo estableció como sistema de categorías, las siguientes: causalidad, multiplicidad, incertidumbre, subjetiva, contingencia, laplaciana, frecuencial, equiprobabilidad y experiencial. Esto le lleva a establecer 5 tendencias de pensamiento:

- La tendencia de pensamiento Determinista, el cual niega la existencia del azar debido a que una vez que se realiza un cálculo de probabilidades queda éste totalmente determinado.
- La tendencia de pensamiento Causal basado en la concepción de *cadenas causales* helenas que concebían que no podía controlarse la causa del azar, considerado como variable.
- La tendencia de pensamiento Personalista, considera el azar mágico o fenomenológico.
- La tendencia de pensamiento llamada de Incertidumbre, caracterizado fundamentalmente por las intuiciones y sucesos que no podemos predecir.
- Tendencia de pensamiento Contingente, caracterizado por intentar buscar el origen a los fenómenos aleatorios así como las variaciones que ocurren.

Con todo lo descrito, estableceremos un sistema de categorías que describiremos con mayor detalle en el apartado metodológico de este trabajo.

1.5.2. Posibles dificultades

El análisis de conceptos relacionados con la probabilidad en estudiantes de educación secundaria presenta diferentes obstáculos, como hemos comentado en apartados anteriores. Además, de los estudios presentados anteriormente se deducen posibles dificultades que nos podemos encontrar a la hora de llevar este experimento a un aula real y serán tenidos en cuenta en el capítulo 4 de esta investigación.

Para contextualizar el problema que vamos a presentar, vamos a enunciar aquellos aspectos y elementos probabilísticos que entran en juego en la resolución de esta paradoja y que a su vez son fuente de error en las soluciones a este problema, tanto aquellos previos al desarrollo de la actividad como los que pueden surgir en la misma. Basándonos Escrich, Gigante & García (2015) son los siguientes:

- El concepto de Probabilidad a la hora saber con las probabilidades con las se cuentan en cada momento del proceso para conseguir el premio. Y tras el cual se encuentra la Regla de Laplace.
- La Ley de los Grandes Números, pueden ser mostrada a los alumnos haciéndoles ver que un experimento aleatorio solo podemos conocer su comportamiento tras repetirlo un gran número de veces, para cual la aplicación puede ser de gran utilidad. En este sentido se muestra también que los resultados que se han dado en cada una de sus repeticiones (Serrano, Ortiz & Rodríguez, 2009, citado en Escrich, Gigante & García, 2015), pues el azar es imposible de predecir.
- Los errores en la comprensión de la probabilidad condicionada que según Batanero Fernandes & Contreras (2009) y Contreras (2011) podemos considerar, son cinco y presentan diferentes naturaleza en relación al número de puertas, el espacio muestral, la asignación de probabilidades y la convergencia, y todas ellas tienen una repercusión en la forma de argumentar las repuestas a la pradoja de *Monty Hall* con la que venimos trabajando en este trabajo de investigación:
    - *Considerar que la apertura de la puerta no cambia en absoluto la probabilidad de ganar*, de modo que nuestra probabilidad sigue siendo 1/3 a pesar de haber escogido cambiar o mantener nuestra elección. Es lo que se denominada "Falacia del eje temporal" descrita por Falk (1986), como se cita en Batanero, Fernandes & Contreras. (2009). Esta dificultad está basada en

considerar independientes, el suceso de elección inicial de la puerta con el suceso de la apertura de una puerta donde no está el premio por parte del presentador. Llevando al error de pensar que la probabilidad del segundo suceso no condiciona el del primero

- *Comprender erróneamente el espacio muestral* considerando que cuando se abre una de las puertas por parte del presentador, la probabilidad de las puertas restantes es ½, excluyéndose la puerta abierta en el cálculo de las probabilidades. En ello, no estamos teniendo en cuenta el hecho de que el presentador conoce en todo momento donde está el premio y que este último abre las puertas donde no hay premio en función de la elección inicial del concursante.
- *Incorrecta asignación inicial de probabilidades* como variante del caso anterior, otro de los errores comunes señalados por Batanero, Fernandes & Contreras (2009) es el de considerar que una vez el presentador muestra uno de las puertas, las probabilidades de ganar el coche son ½. De manera que no se tiene en cuenta que al abrir una puerta sin premio, la probabilidad de contener el premio de esa puerta es 0 y no se tiene en cuenta. Entonces, la puerta no abierta y no elegida por el concursante posee una probabilidad de 2/3.
- *Interpretación incorrecta de convergencia* debido a la aleatoriedad se puede llegar a la conclusión de que no hay diferencia entre cambiar de puerta o mantener tu elección inicial. Si el experimento no es simulado un número suficiente de veces se puede llegar a esa conclusión, que como cita Batanero, Fernandes & Contreras (2009) está relacionado con a la "creencia en la ley de los pequeños números", según Tversky & Kahneman (1982).

Bajo mi pequeña experiencia llevando a cabo este problema a alumnos de 4º de la E.S.O, durante la *Semana de la Ciencia y la Tecnología* realizada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz del 2 al 10 de Noviembre de 2016, muchas de estas dificultades se encontraban presentes en los alumnos, corroborándose también de alguna manera los estudios e investigaciones que existen al respecto. De cara a la realización de este trabajo, y en relación con la experiencia antes nombrada, las expectativas puestas en los resultados que se obtienen en este trabajo guardan relación con lo observado durante el taller realizado en la *Semana de la Ciencia y Tecnología*. Por ello, es conveniente describir las dificultades percibidas. Así, algunos estudiantes presentaban dificultades a la hora de establecer cuál es la probabilidad de que tu elección inicial fuera una cabra o el coche. Además desconocían el hecho de que la suma de probabilidades de todas las puertas fuera 1. Otro de los aspectos que me llamaron la atención fue que, los alumnos no utilizaban un lenguaje matemático a la hora de expresar las probabilidades, ya que estos siempre lo hacían en función de porcentajes y no de fracciones. La gran mayoría de ellos, se centraban en su intuición, apenas se arriesgaban a cambiar de puerta y seguían fieles a sus convicciones. El concurso era experimentado con 5 puertas donde las probabilidades de que su primera elección fuera un coche eran menores que el caso de 3 puertas. El hecho de que, en ocasiones, en algunas de las repeticiones del juego se consiguiera el premio sin cambiar de puerta, les convencía más de que la respuesta a la gran pregunta inicial era mantener la tu elección. Aunque este hecho surge de la observación y no hay ningún estudio que lo respalde, se trata de un aspecto que pretendemos corroborar con la práctica de la paradoja en el aula y su posterior análisis de resultados.

Encontraban también especial problema cuando se explicaba a los alumnos la solución a la paradoja, pues no comprendían la influencia de la puerta abierta por el presentador. En muchas ocasiones, era necesario exponer casos extremos, como el caso de 100 puertas, en las que el presentador posteriormente abre 98 donde no hay premio, para que entendieran la maximización de probabilidades de obtener el premio cambiando de puerta, algo que me llevó a llevar al aula la paradoja con diferente número de puertas, ya que a medida que éstas aumentan, los alumnos ven con mayor claridad la decisión de cambiar de elección. Además, pude comprobar como con aquellos grupos donde pudimos simular la paradoja un mayor número de veces eran muchos más los que comprendían la misma.

Con el estudio que se lleva a cabo en este trabajo, pretendo corroborar las dificultades que surgieron donde esos talleres, junto con las que en estudio anteriores se consideran intrínsecas a la misma. Personalmente, y tras estudiar las dificultades que indican otros autores como Batanero, Fernandes & Contreras (2009) y Contreras (2011), podemos observar que no distan de las percibidas por mi parte durante ese taller realizado con varios grupos.

Realizamos una comparación, a modo de resumen, de la relación existente entre las observaciones individuales realizadas durante la Semana de la Ciencia y la Tecnología, y basados en la mera experimentación con los grupos de alumnos que iban sucediéndose durante la mañana en la que tenía lugar el taller; y las dificultades que se presentan en estudios realizados por los Batanero, Fernandes & Contreras (2009) y Escrich, Gigante & García (2015) y donde se recogen fuentes de error. De ese modo, se encuentran resumidas ambas en la siguiente tabla marcando con una cruz aquellas en las que ambos autores coinciden, y otras que no aparecen en dichos estudios y que se corresponde con la observación realizada.

Tabla 1. *Comparación de dificultades observadas como experiencia personal frente a obtenidas en estudios previos*

	Dificultades	
Observaciones en *Semana de la Ciencia y la Tecnología*	**Batanero, Fernandes & Contreras (2009)**	**Escrich Gigante, B. G., & García (2015)**
Incorrecta asignación de probabilidad a las puertas	X	-
Suma de probabilidad igual a 1	-	-
Considerar mejor opción mantener la elección	X	X
Incorrecta interpretación de la puerta abierta por el presentador	X	X
Interpretación incorrecta de convergencia	X	X
Mayor número de puertas, mejor comprensión	-	-

Fuente: Elaboración propia

Como hemos comentado, las observaciones realizadas en la *Semana de la Ciencia y la Tecnología* son dificultades que no se encuentran en la literatura, sino que surgen de la propia experiencia vivida. Éstas, junto con las dificultades estudiadas por otros autores, nos servirán como punto de partida en nuestro análisis de los resultados que realizaremos en el capítulo 4 de este trabajo y que nos permitirá sacar conclusiones y responder a las cuestiones que nos hacemos esta investigación. Y además observar si surgieron otras nuevas.

2. Justificación del estudio

Cuando un individuo afronta un problema matemático, lo intenta resolver mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes (Piaget, 1975, citado en Batanero, 2013, p.2). En nuestro estudio los alumnos no requieren de conocimientos previos en Probabilidad, luego el resultado del estudio será meramente el producto de lo que los alumnos que vamos a estudiar ya posean. Además y según afirma Piaget (1975), los alumnos que vamos a estudiar se encuentran en la etapa final del desarrollo evolutivo de niño periodo de operaciones frontales, donde entre otras características, destaca relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones (citado en Batanero, 2013).

Todo ello nos lleva a establecer una serie de objetivos de cara al desarrollo de nuestro trabajo. Diferenciaremos entre generales y específicos, con el fin de poder afinar los propósitos de la investigación, estos serán analizados en el capítulo 4 de esta investigación, puesto que suponen el núcleo de la misma. Además de ello, se expondrán algunas cuestiones que nos han surgido de cara a llevar a cabo la paradoja de *Monty Hall* al aula, y que nos ha parecido un momento idóneo para poder sacar conclusiones al respecto.

2.1. Objetivos del estudio

Presentamos en esta sección los objetivos específicos y generales que servirán de eje toda la investigación y sobre los cuales se centrará el análisis de datos posterior.

2.1.1. Objetivos generales

- Analizar los conocimientos en probabilidad condicionada del alumno de 4º de E.S.O a través de un experimento sobre la paradoja de *Monty Hall*.

2.1.2. Objetivos específicos

- Examinar las diferentes soluciones proporcionadas por los alumnos a la paradoja.
- Identificar las dificultades conceptuales probabilísticas encontradas en el desarrollo del experimento en relación a la probabilidad condicionada.
- Evidenciar la influencia de las creencias y la intuición en la toma de decisiones en la paradoja.
- Ver si el aumento del número de puertas en los sucesivos experimentos tiene efecto sobre la compresión de la paradoja en los alumnos.
- Analizar el progreso del razonamiento del alumno a través de las diferentes etapas.
- Observar la influencia de los debates en las soluciones a la paradoja.
- Constatar el uso de paradojas ayuda en la comprensión de conceptos.
- Estudiar el lenguaje utilizado en la expresión de las soluciones.

2.2. Cuestiones de investigación

A raíz de los objetivos que nos marcamos en esta investigación además, pretendemos dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Existe relación entre la identificación de la probabilidad y la expresión de soluciones por parte de los alumnos?
- ¿Cuál es la actitud de los estudiantes ante la actividad planteada en el aula? ¿Se encuentran éstos motivados hacia la misma?
- ¿Cuáles son los indicios al respecto de la simulación en la resolución de la paradoja?
- ¿Las dificultades previas observadas y estudiadas con anterioridad, se ven reflejadas en los resultados obtenidos?

3. Secuenciación y diseño metodológico

Basándonos en el marco teórico desarrollado, apoyado en investigaciones y trabajos anteriores, a cerca de la caracterización de la actividad y las implicaciones didácticas que esta posee, vamos a establecer un sistema de categorías que nos sirva como referencia en nuestro estudio.

Para la realización de la actividad se contactó inicialmente con la directora del centro, la cual me puso en contacto con el profesor de Matemáticas de la rama de Académicas, el cuál imparte clase en todos los cursos de 4º E.S.O. Tras ponerme en contacto con el docente vía e-mail, concertamos una tutoría donde le expuse todo el diseño metodológico de la actividad, así como lo objetivos que perseguía con ello y el material que iba a usar y necesitar en el aula. Se concertó un sistema de codificación de los nombre de los alumnos con el objetivo de mantener la privacidad de los mismos y se acordó dos días para la realización de la actividad. Veremos a continuación más detalles sobre la intervención en el aula.

3.1.Descripción de los estudiantes

En el presente trabajo estudiamos, principalmente, la idea sobre probabilidad condicional de alumnos de entre 15 y 17 años a través de la paradoja de *Monty Hall*.

Hemos simulado la paradoja con tres clases de 4º de E.S.O en el I.E.S. Francisco Javier de Uriarte, en El Puerto de Santa María, Cádiz. En ella, han participado 63 alumnos que cursan la materia de Matemáticas Académicas, donde el 57% de los alumnos eran de sexo masculino y el 43% de los alumnos eran de sexo femenino. La actividad se realizó con el curso de 4ºE.S.O B el día 6 de Noviembre de 2017 y con los cursos de 4º E.S.O A y 4º E.S.O C el día 9 de Noviembre de 2017. Y ninguno de ellos posee conocimientos previos en Estadística y Probabilidad.

La actividad tuvo una duración de 50 minutos, ya que se realizó de manera independiente en cada aula durante la hora de la materia de Matemáticas, y se desarrolló íntegramente en el aula, dotada con pizarra digital y conexión a Internet.

El portafolio que se usa en dicho estudio y que se encuentra en el Anexo II de este documento, es completado por los alumnos durante el desarrollo de las diferentes etapas en las que se componía la actividad. Donde tras la recogida de estos datos se procederá a un análisis de los resultados y justificación de los mismos. Así como un estudio de la interacción entre las variables bajo estudio. Las respuestas de los alumnos servirán también para estudiar la existencia de las dificultades previas que había considerado y contestar a las preguntas principales de este trabajo.

3.2.Metodología

Para el posterior análisis de los resultados, es necesario establecer un sistema de categorías. Para dicho análisis, nos hemos centrado fundamentalmente en si los alumnos al final de toda la actividad, consiguen dar solución a la pregunta: ¿cuándo el presentador te da la opción de cambiar, es mejor mantener tu elección inicial o cambiarla? De ese modo, son diferentes las vertientes que tiene la solución a esta paradoja tiene, por ese motivo, nuestro sistema de categorías estará fundamentado en una clasificación de ellas, a partir de las cuales podamos sacar conclusiones posteriormente.

Para establecerlas dichas categorías, nos basaremos en Batanero, *et al.*, (2013), de gran utilidad en nuestro trabajo puesto que trata la probabilidad condicionada, estrechamente ligada con la paradoja que presentamos en este estudio. También en Díaz (2007) en el cual se hace estudio más profundo de la misma. También en Contreras (2011) en su estudio sobre la paradoja de *Monty Hall* y las dificultades y objetos que intervienen en la misma. Pero nuestro sistema de categorías estará fundamentado en la investigación que Cardeñoso (2001) realizó a cerca del estudio sobre las concepciones probabilísticas en 598 profesores de primaria en activo, y que guarda sintonía con el objetivo principal de nuestro estudio. Así, las categorías estarán definidas basándonos en las nueve establecidas por Cardeñoso (2001) y en las cinco tendencias de pensamiento definidas a partir de las categorías anteriormente mencionadas, esos sí modificado para poder adaptarlo al contexto de la investigación que nos ocupa. Dicho estudio, junto con las dificultades que se han observado en estudios realizados sobre la paradoja como vimos en la sección 2.5.2, las observadas por mi parte durante la Semana de la Ciencia y la Tecnología y las diferentes soluciones que Batanero *et al*. (2013) exponen en su análisis semiótico de la paradoja, han dado lugar a este sistema de categorías.

Distinguiremos entre seis categorías que nos permitirán clasificar las diferentes soluciones que los alumnos pueden dar a la paradoja. Estas categorías las aplicaremos a cada una de las etapas en las que está dividido el taller, con ello pretendemos dos de los ítems marcados como objetivos específicos del estudio, por un lado, la repercusión que el sucesivo aumento de puertas tiene en la respuesta de los estudiantes, y por otro lado, el poder analizar como los debates y momentos individuales y colectivos que se llevan a cabo repercuten de nuevo en la misma. Además de las categorías relacionadas con las diferentes soluciones que nos ayuden a ver los conceptos probabilísticos de los alumnos, hemos introducido una categoría previa en relación con los conocimientos probabilísticos de los estudiantes, y que consideramos que guarda relación con las soluciones que se exponen en la actividad. Además, hemos tenido en cuenta el estudio realizado por Contreras (2011) donde pone de manifiesto la importancia de la semiótica en el campo de la Probabilidad. Por ese motivo hemos incluido dos categorías relacionadas con esto últimos. La primera de ellas en relación a la expresión de la solución por parte de los estudiantes, y hemos distinguido entre aquellos que la proporcionan de manera escrita o a través de algún diagrama o dibujo. La segunda, relacionada con el lenguaje utilizado por el alumno en la expresión de la solución, si este lo hace de manera formal, o utiliza un lenguaje alejado de las Matemáticas.

3.3.Sistema de categorías

En este apartado, vamos a desarrollar el sistema de categorías que hemos establecido de cara al análisis de resultados posterior y cuya fundamentación se encuentra establecidas en el apartado anterior. De ese modo, nuestro sistema está conformado por nueve categorías. La primera categoría relacionada con la identificación de la probabilidad, las categorías de la 2 a la 8 relacionadas con las soluciones proporcionadas por los alumnos. En este último grupo de categorías existen algunas, como la categoría 3 y 6, que a su vez hemos considerado oportuno dividir en dos subcategorías, la explicación de todas ellas se encuentra descrita a continuación. Y una última categoría 9 en la que se recoge las diferentes vías de expresión de dichos razonamientos por parte de los estudiantes. De modo que el sistema de categorías es el siguiente.

C1. Identificación de la probabilidad.

En el portafolio y de manera previa a la simulación, se les pregunta a los alumnos con qué rama de las Matemáticas consideran que está relacionado el problema planteado. Teniendo en cuenta que los conocimientos previos de los estudiantes en Estadística y Probabilidad son escasos o prácticamente nulos, es importante de cara a estudiar los resultados que obtengamos una idea del reconocimiento por su parte, lo cual tendrá repercusión en sus razonamientos y respuestas posteriores.

C2. Solución basada en la "falacia eje temporal".

Se trata de una respuesta dada en función de una de las dificultades que estudios sobre la Paradoja de *Monty Hall* presenta, y por lo tanto será una respuesta en la que no se tiene en cuenta la apertura de las puertas donde hay premio por parte del moderador del concurso, considerándolos como sucesos independientes. En este tipo de respuestas no se tiene en cuenta el hecho de que la apertura de dicha puerta se hace en función de la elección inicial. En este caso, se considera que las probabilidades de ganar el premio tras ese suceso de apertura de la puerta no varía las probabilidades de obtener el premio, luego en el caso de 3 puertas, ésta sería 1/3 en todo momento, para aquellos que siguen este razonamiento. Según Cardeñoso (2001) el perfil que seguirían aquellos alumnos que proporcionan este tipo de soluciones sería personalista. Esto se debe a que consideran que los sucesos ocurren de manera fortuita.

C3. Solución basada en la equiprobabilidad.

En este caso, englobaríamos en esta categoría todas aquellas soluciones de los alumnos que consideran como solución a la paradoja la igual probabilidad de ganar el premio una vez nos encontramos ante dos puertas, una vez el presentador ha abierto las puertas oportunas, mostrando aquellas donde no hay puerta. Es decir, los razonamientos que estén basados en considerar al final, las probabilidades en ese momentos de ganar el premio son la mitad que las de no ganarlo.

Este tipo de razonamientos se pueden producir o bien por una mala compresión del espacio muestral o una incorrecta asignación de probabilidades. Se correspondería con una tendencia causal, donde no se le encuentra una causa a un suceso que es aparentemente aleatorio, como es en nuestro caso el ganar el premio. Por ello, distinguiremos entre estas dos posibles soluciones que puedan proporcionarnos los alumnos

C.3.1. *No comprensión espacio muestral*. El razonamiento que se sigue para llegar a dar esta solución es que, una vez que se abre una de las puertas se considera como la mitad las probabilidades de ganar el premio. Por tanto, se llega a la conclusión de que mantener tu elección o cambiarla no aumenta ni disminuye tus probabilidades de ganar el premio, de modo que no se tiene en cuenta que el presentador sabe dónde está el premio.

C.3.2. *Incorrecta asignación de probabilidades*. En este caso, y de manera similar al anterior, también se considera que la probabilidad de ganar el premio es un ½. En este caso, lo que no se tiene en cuenta es que la probabilidad de la puerta que abre el presentador, en el momento en que se abre tiene probabilidad 0.

C4. Solución basada "creencia de la ley de los pequeños números".

Suele ser una solución a la que los alumnos pueden llegar si no simulan un número suficiente de veces el juego, ya que debido a la aleatoriedad intrínseca a la misma, puede ser fuente de error y considerar que mantener y cambiar de elección no supone ningún tipo de cambio o estrategia para ganar el premio. De nuevo estaría asociada con la tendencia personalista de Cardeñoso (2001), puesto que de nuevo, aquellos estudiantes que aportan esta solución, consideran que elegir la puerta donde se encuentra el premio es fruto del destino.

C5. Solución basada en simulación.

Son aquellas soluciones que se dan a partir de cuantificar la frecuencia con la que suceden los hechos en la simulación. Incluiremos en esta categoría todas las soluciones basadas en las simulaciones realizadas en el aula y que suponen un argumento en la solución proporcionada por el estudiante. Gracias al uso de los contadores con los que cuenta los alumnos en la aplicación, y si realizan el experimento un número suficiente de veces, pueden obtener la frecuencia con la que cada uno de los sucesos, ganar o no el premio, ocurren. Están basadas en la propia experiencia vivida a partir de la simulación, tanto en la aplicación de manera individual como la que se obtiene de la repetición con el atrezo en el aula. Por todo ello, es acorde con la categoría frecuencial que define Cardeñoso (2001), ya que se da una visión frecuencial de la experiencia vivida en la simulación en los diferentes momentos definidos durante el taller.

C6. Solución basada en la regla de Laplace.

Distinguimos entre solución laplaciana basada en la regla de Laplace y solución basada en la contingencia ambas teniendo en cuenta los casos favorables y los casos totales. Proporcionan una solución más formal que las anteriores. En este caso y tal como defiende Cardeñoso (2001), se trata de un perfil determinista, que no deja de considerar que el azar está presente en la paradoja, pero sin embargo utiliza los mecanismos que la Probabilidad posee para el cálculo de probabilidades. Dentro de este tipo de soluciones vamos a distinguir entre dos, la Laplaciana y la de contingencia, las cuales están basadas en las categorías del mismo nombre determinadas por Cardeñoso (2001).

C.6.1. *Laplaciana*. En este caso se proporciona una solución más formal, basada en la regla de Laplace, donde el alumno distingue entre casos favorables y casos totales en la asignación de probabilidades, dando una solución formal y no intuitiva según Batanero (2009). Recogemos en esta categoría las soluciones proporcionadas a partir de un estudio de casos favorables y casos totales, sin tener en cuenta la puerta abierta por el presentador.

C.6.2. *Contingencia*. En ella de manera similar al caso anterior, se proporciona una solución en la que se comparan los casos favorables y totales que se van obteniendo en las repeticiones sucesivas del experimento. En este caso, se realiza el estudio de las probabilidades de ganar el premio, en las distintas elecciones que se hacen en la paradoja.

C7. Solución basada en el azar.

Se refiere a aquellas soluciones que dan como respuesta a la pregunta inicialmente propuesta, el azar o reconocen la aleatoriedad de la misma, argumentando finalmente que no se puede dar solución a la paradoja o que no existe una estrategia efectiva alguna. Argumentan que la solución al problema está basada en la aleatoriedad del mismo y es imprevisible poder escoger una respuesta correcta, ya que ninguna de ellas nos garantiza el éxito. Podría enmarcarse dentro de un perfil indeterminista, donde el consideran la existencia del azar como el motivo central de las diferentes soluciones que se van obteniendo en la paradoja y lo argumentan como conclusión final de todo el proceso.

C8. Soluciones basadas en la causalidad.

Que está basada en la inexistencia de un patrón o algoritmo en la solución de la paradoja, existen factores externos que no permiten el control de la respuesta final. No existe una causa aparente que nos permita controlar los diferentes sucesos o simplemente que no se posee la suficiente información como para dar una regla o solución al problema planteado. Incluiremos en esta categoría todas aquellas soluciones que dan como argumento que no podemos encontrar un patrón para la situación planteada, que esta depende del presentador, del número de puertas, y por lo tanto, la respuesta está basada en la intuición. Los alumnos que aportan este tipo de soluciones estarían encuadrados dentro del perfil o concepción causal que define Cardeñoso (2001).

Figura 1. Representación de las categorías relacionadas con las soluciones a la paradoja

C9. Expresión de la solución.

A la hora de realizar la expresión de la solución final, hemos considerado que para determinarlo, y puesto que cómo los alumnos trasmitan esta información es un reflejo de cómo ellos han comprendido la paradoja, según Contreras (2011), dos posibles expresiones de la misma. Por un lado, aquellos alumnos que den la solución a través de un diagrama o dibujo explicativo de la solución que consideren verdadera, aquellos que simplemente expresan con palabras dicha solución o aquellos que utilizan el lenguaje matemático para expresarlo.

C.9.1. *Haciendo uso un diagrama o dibujo.* Realizan una representación de la solución haciendo uso de dibujos, diagramas o esquemas.

C.9.2. *Verbal*. Realizan una explicación de la situación sin hacer uso de ningún concepto que implique a la Probabilidad.

C.9.3. *Usando lenguaje matemático*. En él se identifican los elementos de la paradoja, como es el espacio muestral, los sucesos, los casos favorables y casos totales, entre otros.

Debemos añadir también los casos de los alumnos que no contestan a las preguntas planteadas o que declaran que, simplemente, no saben la respuesta.

Además, en cada una de las etapas y con el objetivo de poder contestar a las preguntas de investigación y cubrir los objetivos de la misma, hemos recogido información acerca de la influencia del número de puertas en la paradoja y la solución que los alumnos dan, si es mantener la elección inicial o cambiarla cuando tiene oportunidad.

3.4.Diseño de la secuenciación

Según Azcárate (1998) el estudio de las matemáticas:

> “ya no tiene como única finalidad la adquisición de unos conocimientos concretos, aislados y con aparente sentido en sí mismos, sino la integración de los diferentes saberes en una estructura de conocimiento que permita al individuo integrarse e intervenir autónomamente en las situaciones del entorno en que se desenvuelve.” (p.131)

Para ello, es necesario que el docente dedique tiempo a elaborar una secuenciación de actividades y tareas que permitan alcanzar ese fin. En nuestra investigación y en consonancia con el enfoque constructivista que le hemos dado a la misma, hemos desarrollado una serie de instrumentos que nos permitan alcanzar nuestro objetivo, así como la introducción de nuevas tecnologías que nos ayuden a motivar a los alumnos hacía nuestro propósito. Se trata de un proceso inductivo donde los alumnos irán pasando por diferentes etapas que les llevarán de casos más concretos a una generalización final.

La actividad que vamos a realizar se desarrolla exclusivamente en el aula, ya que para la misma los alumnos requieren de su teléfono móvil para de uso de la aplicación. Al contar el aula con pizarra digital, la proyección del video se hace en la misma y no es necesario trasladarse al aula de informática del centro. La actividad se desarrolla durante la hora de clase de Matemáticas. Se lleva a cabo con los tres cursos de 4º de la E.S.O que cursan la asignatura de Matemáticas Académicas, de manera independiente. La primera actuación en el aula tuvo lugar el día 6 de noviembre de 2017 con el curso de 4º de E.S.O B, posteriormente, el día 9 de Noviembre con los grupos de 4º E.S.O A y C, de manera separada. La duración de la actividad es de hora, y en ella se desarrolla la secuenciación de actividades que pasamos a describir a continuación.

Distinguiremos entre tres etapas o fases, cada una de ellas con fin distinto, pero que sin embargo, se apoyan las unas en las otras para dar un resultado final que veremos reflejado en el instrumento de recogida de la información, del cual nos ocuparemos posteriormente.

Comenzaremos con una explicación del desarrollo de la clase a través de un video https://www.powtoon.com/my-powtoons/#/ , que proyectaremos en la pizarra digital del aula y que hemos realizado con la plataforma Powtoon. En el video, se expondrá la manera que vamos a tener de trabajar durante la sesión, así como las etapas que vamos a distinguir y la forma de trabajar durante la misma. En él se explica además, en qué consiste la paradoja y cuál es la gran pregunta inicial. Se plantea por tanto a los alumnos, el reto al que se enfrentarán posteriormente. El fin de realizar la introducción a través de un video, es la de llamar la atención de los estudiantes, usando un tono distendido en el mismo.

Figura 2. Explicación de aspectos generales a los alumnos

A continuación, comenzaremos la primera parte de la actividad, donde presentamos la paradoja de *Monty Hall* en el caso de tres puertas. Para ello usaremos la aplicación realizada en Geogebra (https://www.geogebra.org/m/M4HpUMdM). Compartiremos el enlace a partir del cual, los alumnos con sus dispositivos móviles podrán acceder a una aplicación realizada con dicho software libre. A ella podrán acceder a través del enlace anterior, o a partir del código QR que se encuentra en el portafolio entregado al inicio de la sesión. En dicha aplicación, podrán realizar la simulación del concurso “Hagamos un trato”, del cual surge posteriormente la paradoja de *Monty Hall*, tantas veces como quieran. Al finalizar deberán rellenar la primera parte del portafolio que acompaña a la simulación, obteniéndose así una primera conclusión de la actividad.

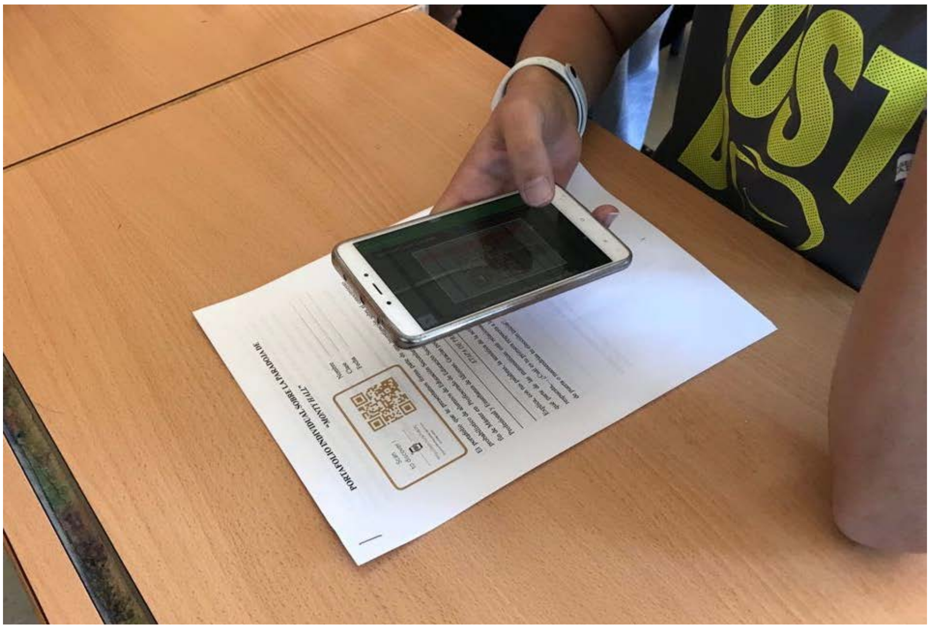


Figura 3. Uso del código QR para acceso a la aplicación

Una vez los alumnos han simulado la paradoja en la aplicación comenzamos con la segunda etapa. En esta parte los alumnos trabajarán de manera cooperativa, creando pequeños grupos de debate podrán reflexionar sobre las diferentes opciones que se tienen en el juego, sus propios resultados e intercambiando puntos de vistas con el resto de compañeros. De ese modo, amplían a posibles soluciones y posibilidades que en la primera etapa no les hayan surgido a nivel individual. Con ello, se pretende que los estudiantes se acerquen un poco más a intentar dar solución a la paradoja. Tras ello podrán modificar la conclusión inicial o añadir puntos de vista, datos o cuestiones que no hayan tenido en cuenta en su primera simulación. Será posible que los alumnos expresen sus conclusiones y la solución a la pregunta inicial a través de un diagrama de árbol o cualquier otro tipo de esquema que les pueda ayudar a obtener sus conclusiones.

Una vez finalizada la parte de debate con el resto de compañeros, se procederá a realizar una puesta en común de las conclusiones de los alumnos, con el objetivo de poder ir observando las primeras resoluciones a la paradoja que van dando los alumnos tras el primer acercamiento al mismo.

En una tercera etapa, y haciendo uso de atrezo físico que simula el concurso. En esta fase, los alumnos se convertirán de nuevo en los concursantes y será la docente la que con un papel que representa al presentador del concurso, dirija el curso de dicha etapa hacía soluciones que se hayan obtenido hasta el momento, dándoles formalidad ha a aquellas que sí lo han hecho, resolviendo dudas e introduciendo los conceptos probabilísticos intrínsecos al problema. Siempre haciendo partícipes a los alumnos de este proceso.

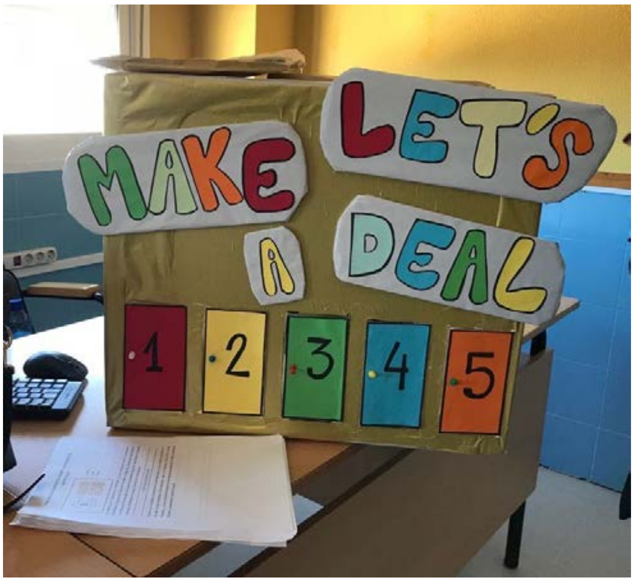


Figura 4. Atrezo utilizado para la segunda parte de la actividad

Dividiremos este proceso en dos partes, una primera, en la que simularemos la paradoja de nuevo con cuatro puertas, donde se realizará la actividad de tal manera que el presentador abre dos puertas donde no hay premio tras ellas, ofreciéndole al concursante poder cambiar de puerta tras la apertura de las mismas. Y una segunda con cinco puertas, donde se procederá de igual forma que para el caso anterior. En ambos casos, el problema queda reducido al caso de 3 puertas, el objetivo de ello, es por un lado que observen la independencia entre el número de puertas y la solución a la paradoja y también, la posibilidad de realizar un mayor número de repeticiones de la paradoja. Teniendo los alumnos una nueva oportunidad de reflexionar sobre la introducción de este nuevo factor en la solución del problema. Tras simular el experimento con cuatro puertas los alumnos deberán de nuevo reflexionar sobre si los cambios que se han realizado de una etapa a otra han influido en la conclusión a la que habían llegado inicialmente. Respondiendo a una parte del portafolio proporcionado al alumnado. De igual forma tras simular el caso de cinco puertas.

Figura 5. Momento de explicación de dudas generales surgidas

En todo momento, en esta etapa la participación de los estudiantes será total, pues se pretende que todos participen en la simulación del juego en los casos de cuatro y cinco puertas, exponiendo su estrategia o intuición forjada en la etapa anterior, lo que hace de la experiencia una puesta en escena mucho más rica y diversa. Al finalizar esta segunda etapa, se les pedirá a los alumnos que expresen en el portafolio una solución final a modo de conclusión final y que dé respuesta a la pregunta inicialmente planteada. Además se les pedirá que supongan el caso de 100 puertas en la paradoja y que a partir de lo visto en casos anteriores, intenten generalizar la solución. Siendo esta última una tercera etapa de generalización del problema.

Finalmente, expondré las diferentes soluciones que se hayan puesto de manifiesto desde un punto de vista formal, si no han surgido durante el trascurso de la sesión. Además, destacaré las principales fuentes de error que inducen a la mayoría de personas a obtener una solución errónea y que hace que este problema sea una paradoja.

Tabla 2. *Elaboración propia del resumen etapas de la actividad*

Etapa	*Contenido*	*Instrumento*	*Metodología*
1ª Etapa			
- 1ª Parte	Simulación con 3 puertas	Aplicación Geogebra	Trabajo Individual
- 2ª Parte	Simulación 3 puertas	Portafolio	Trabajo cooperativo
2ª Etapa			
- 1ª Parte	Simulación 4 puertas	Atrezo y portafolio	Grupo-clase
- 2ª Parte	Simulación 5 puertas	Atrezo y Portafolio	Grupo - clase
3ª Etapa	Generalización de la paradoja	Portafolio	Individual

Fuente: Elaboración propia

La forma de realizar esta actividad de la manera en la que la hemos planteado surge del objetivo de tener a los alumnos motivados hacía la misma, evitando el desinterés y el aburrimiento. Algo que debemos tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje según Font, Badia, i Muntada, Muñoz & Cabaní (1994).

Diferentes trabajos han llegado a la conclusión de la que motivación intrínseca incrementa el rendimiento académico y en definitiva, favorece una aprendizaje significativo de esta materia (Baroody, 1988; Skemp, 1980; entre otros, citado en Alsina y Domingo, 2007, p.24), algo que es inherente al alumno. Pero sin embargo, juega también un papel fundamental la motivación extrínseca, la cual viene dada por agentes externos y donde el docente y las actividades que se desarrollen, y cómo se desarrollen tendrán una influencia directa sobre ella. Por ello, de nuevo, el uso de juegos y la presentación de manera interactiva hacen que consideremos esta secuenciación, así como el enfoque del que hablaremos posteriormente. Estos instrumentos serán analizados en la siguiente sección del trabajo donde se pone de manifiesto su importancia dentro de la investigación.

3.4.1. Instrumentos de presentación de la paradoja

Como hemos comentado en la sección anterior, en la secuenciación que hemos preparado para nuestra investigación son necesarios diferentes instrumentos. En cada una de las etapas anteriores hemos incluido aplicaciones, nuevas tecnologías y atrezo que pasamos a describir con mayor detalle para la mejor comprensión de la actividad en el aula.

Inicialmente comenzamos con un video, que se puede encontrar en el siguiente enlace: https://www.powtoon.com/my-powtoons/#/ . Éste, nos sirve de presentación de los que vamos a realizar posteriormente. En él, explicamos el concurso de “Hagamos un trato” sin mencionar en ningún momento la paradoja de *Monty Hall*. Posteriormente, usamos ese mismo video para explicar a los alumnos las diferentes etapas que van a constituir el experimento. Este video ha sido realizado con la plataforma PowToon, una herramienta online para la creación de videos con diferentes fines.

En la primera etapa hemos realizado una aplicación con el software libre Geogebra que los alumnos pueden encontrar en: https://www.geogebra.org/m/M4HpUMdM. Para acceder a ella, hemos creado un código QR, que hemos insertado en el portafolio que es entregado a los alumnos. A través del escaneo código QR con su teléfono móvil tienen en segundos la aplicación creada con Geogebra en su móvil. Para aquellos alumnos, que tuvieran algún problema con este tipo de sistema, hemos incluido en el mismo portafolio el link a dicha aplicación. En ella, hemos simulado la paradoja de *Monty Hall* para el caso con tres puertas. En la misma, los alumnos pueden obtener las instrucciones del juego permitiendo la autonomía de la actividad.

Los estudiantes pueden hacer uso de esta aplicación como si participaran en el propio concurso. Deberán elegir una de las tres puertas que se les presenta, tras ello, el presentador les abre una de las puertas mostrándoles una cabra, y les invita a que cambien de puerta o mantengan la elección inicial. Tras esta segunda selección, se muestra el premio obtenido.

Además, la aplicación cuenta con la posibilidad de poder repetir el experimento tantas veces como se quiera, ayudando a la simulación del mismo y por tanto, a una obtención de conclusiones. De igual forma, para ayudar a esa obtención de la solución, la aplicación cuenta con unos contadores de las partidas jugadas, los éxitos, o veces en las que el premio es el coche, y contador de fracasos, o veces en las que el premio es una cabra. Sabemos que estos elementos tienen relación con mantener la elección inicial o cambiarla, por ello se han proporcionado contadores al respecto que ayuden, al igual que los anteriores, o reflexionar sobre ello, que podemos encontrar en el Anexo I.

La simulación de este experimento permite al alumno sacar conclusiones en función de las decisiones que este tome antes de compararla con la del resto de compañeros y poder construir una solución muchas enriquecidas. Además permite equivocarse y volver a empezar, lo cual es vital en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza (Brousseau, Davis & Werner, 1986, citado en Del Puerto, Minnaard & Seminara, 2006, p.1). Esta fuente de error a la que está sujeto el conocimiento científico es usada en nuestra investigación ligada al constructivismo, sin embargo son varias las concepciones sobre el error que otros autores dan al respecto[2].

Por último, con el objetivo de formalizar las soluciones, a priori intuitivas que a los alumnos nos proporcionen y tras la reflexión conjunta que hayan hecho los alumnos, pasamos a usar una simulación física de la paradoja de *Monty Hall*, realizada por la docente. En este caso la fabricación del material ha sido realizada con cinco puertas, pero serán usadas cuatro de ellas en la simulación de la paradoja para la simulación de la misma con dicho número de puertas, modificándose el material manipulativo para atender las necesidades que se requieren en cada etapa. Se simulará, con los dos números de puertas 4 o 5, el concurso con la participación de los estudiantes y se anotarán los mismos parámetros que en la versión interactiva, para ayudar a los alumnos a obtener conclusiones al respecto.

3.5.Enfoque de la investigación

La investigación que nos ocupa es de tipo exploratorio, está basada en el alumno y con una metodología centrada en el desarrollo de un experimento en el aula mediante el diseño

[2] Consultar Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J. Kilpatrick y L. Rico (Eds.), *Educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

de cuál pretendemos obtener información y reducirla a través de un análisis del contenido y presentarlos a través de un tratamiento descriptivo para poder discutir la exploración de las ideas en probabilidad condicionada en una muestra de alumnos de 4ºE.S.O, lo más atractiva posible para estos.

Hemos partido del análisis de la paradoja en otras investigaciones, que hemos descrito en el marco teórico, a partir de las dificultades y conclusiones de las mismas hemos creado la actividad para la intervención en el aula.

Dentro de la actividad de la paradoja de *Monty Hall* un aspecto fundamental es la probabilidad condicionada, de modo que un mal concepto de la misma es la principal fuente de error al intentar dar solución a este problema. Así nos hemos basado en estudios realizados al respecto para la realización de la actividad.

3.5.1. Enfoque de la actividad

En el proceso de enseñanza-aprendizaje intervienen tanto el sujeto que aprende, el alumno o alumna, como los conocimientos en matemáticas. En torno a ellos surgen diferentes concepciones por parte de los docentes que están implicados en dicho proceso, y que tienen por tanto una repercusión en su manera de intervenir en el proceso educativo. La manera en que el docente conecta lo que se piensa y cómo lo pone en práctica puede realizarse a través de diferentes secuencias de actividades y éstos están basados en unas teorías y principios que lo fundamentan. Así, en un análisis de la investigación que nos ocupa, nos centramos en describir a continuación la metodología, es decir, el cómo enseñar y la tendencia didáctica que fundamenta nuestro estudio. Para ella nos hemos centrados en el análisis semiótico que Batanero, Fernandes, & Contreras (2009) realizan sobre esta paradoja, en cuanto a establecer diferentes momentos durante el desarrollo de la actividad.

Pretendemos en todo momento que sean los alumnos los que construyan el conocimiento, es decir, todos los conceptos, relaciones, definiciones y lenguaje en torno a la Probabilidad intrínseca en nuestra actividad, por ello, el modelo docente estará basado en el constructivismo, donde vamos a proceder de manera que la resolución de sucesivas actividades previamente establecidas por el docente permita a los alumnos solucionar conflictos que se le vayan planteando de manera autónoma.

Como hemos visto en la secuenciación de actividades que vamos a llevar a cabo, vamos a proponerle a los estudiantes una situación problemática a partir de la cual, lograrán un aprendizaje significativo ya que reconoce un nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta nueva (Waldegg, 1998) y es lo que esta misma autora define por hipótesis de la acción inteligente y de la modelación sistemática[3]. Este tipo de retos planteados en el alumno deben proponer un desafío que le permita un aprendizaje significativo ya que reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta nueva (Waldegg, 1998). De esa forma el modelo constructivista en el que nos vamos a basar considera tres ejes que se van a corresponder con las tres etapas en las que hemos dividido nuestra actividad en el aula.

La primera de ellas, es la correspondiente al manejo de la aplicación con Geogebra por parte de los alumnos. Es por tanto una etapa de exploración y observación de los resultados que se vayan obteniendo. Una etapa en la que se comienzan a establecer las primeras relaciones y donde se a través del juego, y la flexibilidad del mismo, el alumno o alumna podrá modelar sus conocimientos a lo largo de la misma.

En la segunda etapa, en la que se reúnen con el resto de compañeros para reflexionar sobre los resultados, se buscan explicaciones, se socializa y comienzan a darle nombre a los objetos que les han ido surgiendo en la etapa anterior. Es un momento en el que desde el punto de vista del constructivismo, se produce la búsqueda y descubrimiento y donde se comienzan a cuestionar otras posibles soluciones al problema.

Por último, la tercera etapa, donde se simula la paradoja de *Monty Hall* todo el grupo en su conjunto, se pretende formalizar a través de fórmulas y sobre todo del lenguaje las posibles soluciones que los alumnos aporten. Es en este momento, donde el docente juega el papel más importante, haciendo de guía del conocimiento y de las reflexiones que han realizado los alumnos de manera autónoma. Es una etapa en las que se afianza el conocimiento y donde los alumnos están motivados a encontrar el éxito, en nuestro caso la solución a la paradoja, lo cual les produce una automotivación que favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así, hemos tenido en cuenta que la actividad planteada suponga un problema, un desafío de manera que:

> "Para que el estudiante pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la obligatoria interacción activa con los objetos matemáticos, incluyendo la reflexión que le permite abstraer estos objetos, es necesario que estos objetos se presenten inmersos en un problema y no en un ejercicio. De hecho son estas situaciones problemáticas las que introducen un desequilibrio en las estructuras mentales del estudiante, que en su afán de equilibrarlas (un acomodamiento) se produce la construcción del conocimiento." (p. 5, Mieles, 2012).

La manera de llevar la actividad al aula hemos querido plantearla de manera que el alumnos durante la hora de duración del taller, se cuestione constantemente a cerca de la

[3] Hipótesis de la acción inteligente y de la modelación sistémica, aquella en la que el estudiante aprende a partir de sus conocimientos previos que modifica o adecua con el fin de incluir coherentemente la nueva experiencia

solución al problema. Por ello, es planteada una gran pregunta al inicio del mismo, del cual se van obteniendo otras que ayudan a la resolución de la paradoja. La solución es proporcionada al final de la actividad, tras unas varias etapas en la que los alumnos trabajan tanto de manera autónoma como en grupos como con el conjunto de la clase, y donde el papel del docente es, al igual que la del presentador del programa de televisión *Monty Hall*, meramente de moderador y guía de la actividad.

Por último, anotar que la aparición de errores en la construcción de conocimientos matemáticos va a estar presente y deberemos incluir un diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones (Rico, 1995), como es el caso de una simulación de la paradoja a través de cien puertas, ya que se trata de un caso exagerado, donde errores o falsas conclusiones de los estudiantes pueden ser corregidas y superadas.

3.6. Técnicas e instrumentos de recogida

Vamos a describir a continuación dos de las principales herramientas que hemos utilizado para la recogida de los datos que posteriormente analizaremos, procedente de la actividad que hemos llevado a cabo en el aula. Por un lado el portafolio donde hemos recogido las respuestas de los alumnos, y por otro, el diario, donde durante las diferentes intervenciones, recogimos algunos aspectos de relevancia que no podían quedar plasmados en el instrumento de recogida que hemos utilizado en el trabajo, se puede encontrar de manera íntegra en el Anexo III de este documento.

3.6.1. Portafolio

La recogida de datos de la actividad realizada por los alumnos se hizo mediante un portafolio, que podemos encontrar en el Anexo II. El portafolio ha sido la fuente principal de recogida de información en el proceso de investigación. Éste ha sido realizado atendiendo a las necesidades de la metodología creada anteriormente. Al inicio del mismo, los alumnos encuentran el código QR con el cual puede acceder a la aplicación realizada en Geogebra simplemente escaneándolo con su dispositivo móvil. Para evitar cualquier tipo de problema que pudiera surgir al respecto, se encuentra junto a él el enlace a dicha aplicación para poder introducirlo en el explorador y poder acceder a la misma. En la parte superior también encontramos algunos datos que los alumnos deben rellenar como nombre y curso. Para mantener la privacidad de los mismo, se estableció un sistema de codificación donde cada uno de los alumnos tenía asignado un número que, junto con el curso al que pertenecen, quedaban perfectamente identificados como el número más 4 del curso más letra del grupo; por ejemplo 204B.

El portafolio que hemos elaborado está ligado a las etapas que vamos a llevar a cabo y pensando en todo momento en poder ver la evolución del razonamiento del alumno a lo largo del mismo de tal manera que se ha establecido tantas partes en el mismo como etapas llevaremos a cabo en el aula. Dentro de cada una de ellas la estructura que se presenta es la misma. Se pregunta cuál es la mejor estrategia, así como una respuesta razonada de cómo se ha llegado a la misma. En las dos últimas etapas sobre la influencia del número de puertas en la paradoja.

Con más detalle en una primera etapa cero donde pretendemos que los alumnos expliquen, con sus palabras la primera intuición que tienen en relación a la pregunta que se les plantea, además que intenten relacionarlo con alguna de las ramas de la Matemática, con el objetivo de ponerlos en contexto, debido a la falta de formación en Probabilidad que éstos poseen. Por otro lado, la primera etapa está dividida en dos fases, una primera donde debe contestar preguntas una vez hayan realizado la simulación con la aplicación de manera individual. En ella se les pregunta sobre la respuesta a la pregunta inicial y se les orienta haciéndoles completar una tabla en relación al número de jugadas que han realizado, las veces que han ganado o perdido, así como las veces que han cambiado de puerta o la han mantenido. A partir de ello, podrán sacar conclusiones finales, como se les pide al final de dicha fase. Tras ello, los alumnos pueden exponer las conclusiones que han obtenido una vez han debatido con el resto de compañeros y han compartido sus soluciones. En una segunda etapa correspondiente a la simulación con 4 y 5 puertas, las preguntas que se encuentran en el portafolio van en consonancia con las de la primera etapa, donde se les preguntaba a los alumnos en el caso de 3 puertas. De nuevo, debían elegir sobre qué estrategia es la mejor, si cambiar o mantener tu elección inicial. Con ello, se pretende hacer reflexionar al alumno sobre la influencia que el número de puertas pueda tener en la paradoja. De igual forma, hemos querido que en cada una de las etapas la estructura del portafolio tuviera la misma estructura, con el fin de que el alumno se cuestionara a cerca de las mismos ítems en cada una de las mismas, dejando constancia de un proceso evolutivo a lo largo del todo el portafolio que nos permitirá posteriormente, ver dicha evolución y progreso, así como ver el efecto que las diferentes etapas van teniendo en el razonamiento y respuesta final del estudiante. Por último en la última etapa, y como punto final a dicho procedimiento en el que le número de puertas ha ido en aumento, pretendíamos que el alumno fuera capaz de generalizar la paradoja a un caso n de puertas. Par ayudar a obtener una respuesta en dicho apartado, hemos preguntado inicialmente por 100 puertas. A partir de ello, y siguiendo la estructura que veníamos trayendo los estudiantes podrán intentar dar solución al caso más general.

3.6.2. Diario

Otro de los instrumentos de recogida de datos que se ha realizado es el diario, que se puede encontrar en el Anexo III de este documento. En él, hemos ido recogiendo todo lo experimentado en las diferentes aulas durante la intervención en las mismas llevando a cabo la actividad. Puede verse reflejado tanto problemas técnicos que se tuvieron en la realización de la misma, como preguntas llamativas de los alumnos y que desde un punto de vista analítico era necesario dejar constancia. Muchas discusiones y conversaciones de los estudiantes donde se podían detectar algunas de las dificultades que se presuponían que podían encontrar en el trascurso de la clase, así como las intrínsecas a la propia paradoja. También percepciones desde el punto de vista como futuro docente, en cuanto a la disposición del aula, como los alumnos trabajaban en las diferentes etapas, y la repercusión que esto tenía en la misma. También la actitud por parte de los alumnos, su participación y reflexión. Gracias a toda la información que hemos recogido en el mismo, podemos tener en cuenta los resultados que se han obtenido en cada una de las sesiones programadas, y encontrar así anomalías o poder justificar los resultados o eventos diferentes que podía haber surgido en cada una de ellas.

3.7.Procedimiento de análisis de datos

El análisis que vamos a realizar a continuación pretende estudiar las diferentes argumentaciones que los alumnos de 4º de la E.S.O del centro donde hemos realizado la intervención anteriormente explicada, dan como resultado a la paradoja de la actividad. En total, han sido estudiados 62 alumnos de tres cursos distintos cursando todos ellos la asignatura de Matemáticas Académicas. De todos ellos, encontraremos etapas en las que muchos de ellos no san solución a la parte del portafolio entregado, y por lo tanto hemos añadido en cada una de las etapas el apartado de NS/NC (no sabe o no contesta) para que quedara constancia de ello.

La presentación de los datos los realizamos a través de tablas y gráficos que resumen de manera visual la información cualitativa obtenida, para ello hemos utilizado el procesador Excel.

Se han elaborado dos tablas para cada una de las etapas. Una primera donde, dividido por grupos, se encuentra los relativo a las soluciones que los alumnos han aportado y la expresión de la misma; y una segunda en la que se encuentra recogido la influencia del número de puertas y cuál es la respuesta que los alumnos dan a la pregunta inicial que se les realiza de: ¿es mejor mantener o cambiar tu elección? A partir de ellas y de la experiencia vivida, recogida en el diario, realizaremos comparaciones entre los grupos. La división entre los diferentes grupos es necesaria puesto que a pesar de que la metodología y secuenciación de actividades llevada a cabo en las aulas sea la misma, existen factores que hacen que los resultados puedan variar de una a otra, tales como la situación de los estudiantes en el aula la naturaleza del curso, el lenguaje utilizado, así como imprevistos que pudieran surgir. Todo ello, hemos usado un diario que se puede encontrar en el Anexo III de este documento.

Por otro lado, hemos analizado la respuesta de los alumnos en las diferentes etapas llevadas a cabo, donde el número de puertas de la paradoja iba aumentando a lo largo de las mismas. El objetivo es poder hacer un estudio respecto a la influencia del número de puertas, así como ver la tendencia de las respuestas que proporcionan los estudiantes.

También hemos recogido el porcentaje de alumnos que deciden mantener o cambiar de puerta, para ver el progreso de esta decisión a lo largo de las etapas. De igual forma, el número de estudiantes, en cada aula, que considera influyente el número de puertas en su solución a la actividad.

4. Informe de investigación

En este capítulo vamos a realizar un repaso de todas las etapas llevadas a cabo en el aula a través de los datos recogidos en los portafolios entregados a los alumnos. Nuestra actividad constaba de tres etapas, éstas serán vistas una a una en relación a los tres grupos. Comenzaremos en la primera etapa con la identificación de la probabilidad y la expresión de los resultados, para a continuación ver los argumentos dados por los estudiantes en los tres grupos. Además de todo ello, veremos la influencia de las puertas en la toma de decisiones, y cuáles son estas al final de cada una de las etapas. Tras ello, pasaremos a la segunda y tercera etapa donde haremos lo propio. Una vez realizado dicho análisis, prestaremos atención a los objetivos y cuestiones que nos planteamos para este trabajo, así como las limitaciones del mismo y que se han visto reflejados en las respuestas de los alumnos. Por falta de espacio, una comparación entre todas ellas, en la que se puede ver la evolución de todas las cuestiones expuestas en cada una de las partes de la sesión se encuentra en el Anexo IV de este documento. Tras ello analizaremos las cuestiones y objetivos de este trabajo y contrastaremos las posibles dificultades establecidas en el capítulo 1 de esta investigación. Con ello se pretende hacer un análisis lo más exhaustivo posible de los datos obtenidos.

4.1. Análisis de resultados de la primera etapa

En este apartado se pretende realizar un análisis de los resultado obtenidos por lo estudiantes en la primera etapa a través del portafolio que han completado y hemos recogido posteriormente. Comenzamos esta parte con un análisis de esta etapa donde los alumnos se enfrentaban a través de la aplicación en Geogebra a la paradoja de *Monty Hall*, para el caso de 3 puertas.

Inicialmente estudiaremos la primera de las categorías relacionada con la identificación de la probabilidad. Debido a su relación con la categoría 9, aquella establecida para el expresión de los argumentos, será analizada a continuación, dejando para el final el análisis de las respuestas de los alumnos. Como último apuntes veremos la influencia del número de puertas en el desarrollo de la paradoja y cuál es la respuesta que los alumnos consideran correcta tras esta primera simulación

4.1.1. Identificación de la probabilidad y expresión de resultados

Comenzamos nuestro análisis con la primera de las categorías que hemos establecido. En la Tabla 3 que se muestra a continuación, hemos incluido también la categoría correspondiente a la identificación de la probabilidad de la etapa de presentación y las diferentes maneras en las que han expresado las soluciones a las cuestiones los alumnos. Es decir, si están vienen expresadas haciendo uso de diagramas o dibujos, de manera escrita o usando un lenguaje más formal y con cierto carácter matemático.

En la siguiente tabla se resumen ambas categorías para cada uno de los cursos, mostrándose la frecuencia de alumnos que han identificado la probabilidad en el caso de C1 junto con el porcentaje de alumnado al que se corresponde. De igual forma, para el caso de la expresión de soluciones, la tabla es elaborada bajo el mismo sistema, en este caso haciendo la subdivisión de esta categoría en otras para su mejor comprensión.

Por último, se encuentra en esta misma tabla las categorías relacionadas con las diferentes argumentaciones que los alumnos pueden hacer en relación a la pregunta que le hemos realizado en la intervención en el aula.

Destacar que, el orden de este análisis sólo se realizará de esta manera en la primera etapa, ya que es en está donde se le pregunta por la identificación de la probabilidad, como etapa de presentación que podemos encontrar en el Anexo II, donde se encuentra el portafolio. Por ello, no tiene sentido el análisis junto con la expresión de resultados en las etapas segunda y tercera. En ellas se procederá primero a realizar el análisis de soluciones, posteriormente la expresión de soluciones y finalmente, como ocurre en este caso también, al análisis de otros aspectos que pretendemos investigar.

Tabla 3. *Respuestas en la primera etapa de la actividad, elaboración propia*

Categoría	**Curso**					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
C1. Identificación de la probabilidad	9	45	9	42,86	2	9,09
C9. Expresión de la solución						
C.9.1. *Haciendo uso un diagrama o dibujo*	4	21,05	5	23,81	2	9,09
C.9.2. *Verbal*	12	63,16	9	42,86	16	72,73
C.9.3. *Usando lenguaje matemático*	2	10,53	3	14,29	2	9,09
NS/NC	1	5,26	4	19,05	2	9,09
Total	19	100	21	100	22	100
C2. Solución basada en la "falacia eje temporal"	0	0	1	4,76	0	0
C3. Solución basada en la equiprobabilidad						
C.3.1. *No comprensión espacio muestral*	1	5.26	4	19,05	0	0
C.3.2. *Incorrecta asignación de probabilidades*.	1	5.26	2	9,52	0	0
C4. Solución basada "creencia de la ley de los pequeños números".	3	15.78	0	0	1	4,55
C5. Solución basada en simulación	7	36.84	4	19,05	4	18,18
C6. Solución basada en la regla de Laplace						
C.6.1. *Laplaciana*	1	5.26	2	9,52	1	4,55
C.6.2. *Contingencia*	0	0	1	4,76	1	4,55
C7. Solución basada en la incertidumbre	5	26.32	5	23,81	11	50
C8. Soluciones basadas en la causalidad	0	0	2	9,52	1	4,55
NS/NC	1	5.26	0	0	3	13,64
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

Incluimos a continuación, los diagramas correspondientes a los datos expuestos anteriormente para permitir observar los datos mostrados en la tabla anterior de una manera más visual. Mostramos la siguiente gráfica donde se expone el número de alumnos que reconocen la probabilidad en la primera etapa. Los colores que en él aparece se corresponden con la leyenda situada en la parte derecha del mismo.

Figura 6. Identificación de la probabilidad en la primera etapa

Podemos observar como en general, una vez presentado el problema a los estudiantes en los cursos de 4ºE.S.O A y B un gran porcentaje de alumnos reconocen la probabilidad como rama de la matemática que se encuentra relacionada con el paradoja que les ha explicado previamente. Por otro lado, es llamativo destacar como en el curso C, este mismo porcentaje de alumnos es bajo pero sin embargo, un 50% de los estudiantes consideran que la respuesta de dicha paradoja está basada en el azar, y por lo tanto, relacionado con la aleatoriedad.

Por otro lado, como hemos resumido en la *Tabla 3* otra de las cuestiones que hemos querido estudiar en esta investigación, ha sido la manera en la que los estudiantes trasmitían las soluciones a la paradoja presentada. Como se puede observar, la mayoría de las respuestas los alumnos la dan sin nada de contenido matemático, intentando explicar de manera verbal cuáles es su razonamiento para llegar a la conclusión, como es el curso de 4º E.S.O A. De manera similar para el resto de grupos, y muy acentuado en el caso del grupo-clase de 4º E.S.O C. Luego la falta de expresión de resultados de manera matemática o más formal es generalizada a los tres grupos. Si es cierto que son muchos los estudiantes que hacen uso de dibujos para la expresión de su estrategia y decisión en esta primera etapa. Un ejemplo de ello se ve reflejado en la *Figura 7*.

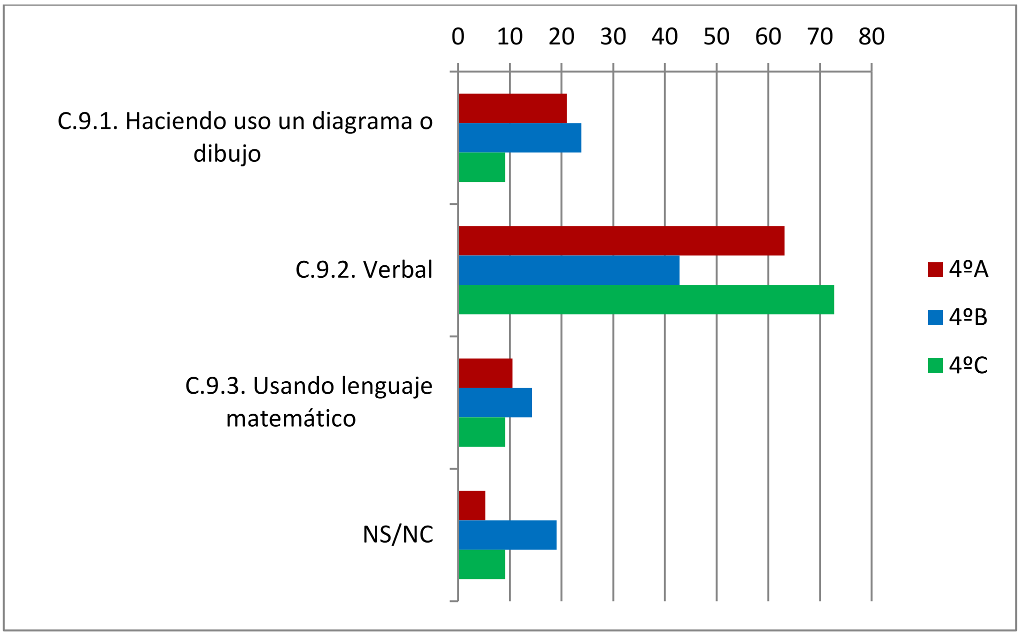


Figura 7. Resumen de expresión de resultados en la primera etapa por 4ºA

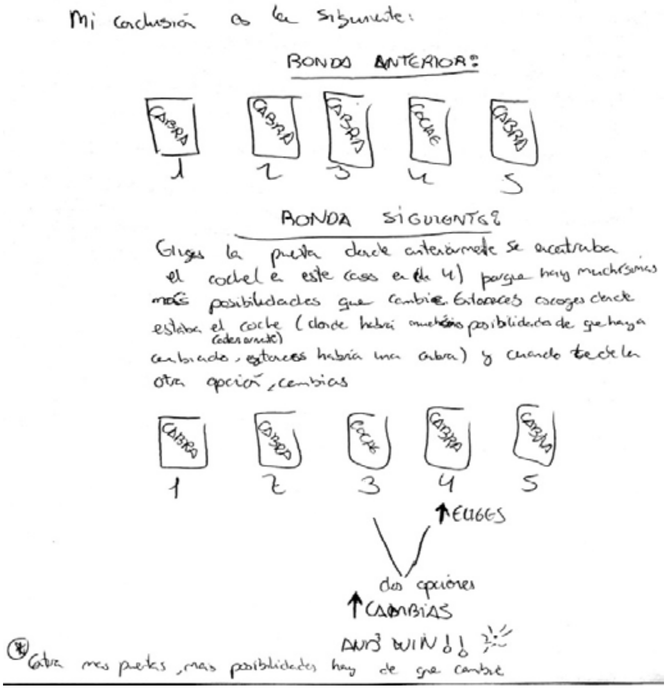


Figura 8. Respuesta del alumno 4C14 a la primera etapa

Se observa cómo el alumno hace uso de dibujos, pero también de su expresión escrita para la explicación de la estrategia que ha seguido en la paradoja.

En este sentido, en el Anexo IV de este documento, podemos encontrar un diagrama que representa la evolución en la respuesta de los estudiantes en torno a la cuestión de la forma de expresión de las respuestas, realizada para cada uno de los grupos y que ha sido incluido en dicho anexo por falta de espacio.

Como hemos comentado anteriormente, existe una relación entre las categorías 1 y 9, como podemos ver en los grupos A y B, donde el porcentaje de alumnos que reconocen la probabilidad es de casi el 50%, la expresión de resultados a través de diagramas o dibujos que ene l caso del grupo-clase C, donde apenas un 10% de los estudiantes consideran que detrás de la paradoja presentada se encuentran aspectos relacionados con la probabilidad. Esto se ve reflejado en la expresión de sus soluciones que destaca por ser carente de diagramas, y poco formales en general.

4.1.2. Análisis de respuestas de los tres grupos

A continuación vamos a realizar un análisis de las respuestas dadas en cada uno de los grupos en la primera de las etapas. Recordar que nuestro experimento consta de tres etapas que serán analizadas en secciones posteriores. Para esta primera nos ayudaremos de las *Figura 9, Figura 11 y Figura 13* en las que se muestran los diagramas correspondientes dichas respuestas dadas por los alumnos en los tres grupos de 4ºE.S.O. Recordamos que el único contacto que han mantenido con la paradoja es a través de la aplicación de Geogebra.

En adelante para proporcionar una visión más gráfica de los resultados y puedan ser observados con mayor facilidad a simple vista, hemos establecido un sistema de colores para ellos. Para el caso de las categorías que se subdividen en dos subcategorías, como son el caso de C3. Equiprobabilidad y C6.Solcuiones basadas en la regla de Laplace, hemos utilizado el mismo color pero en distinta tonalidad. En el primer caso hemos asociado el color verde, y para el segundo caso el color naranja.

Comenzamos con el curso de 4ºE.S.O A, cuyas respuestas se presentan en este diagrama.

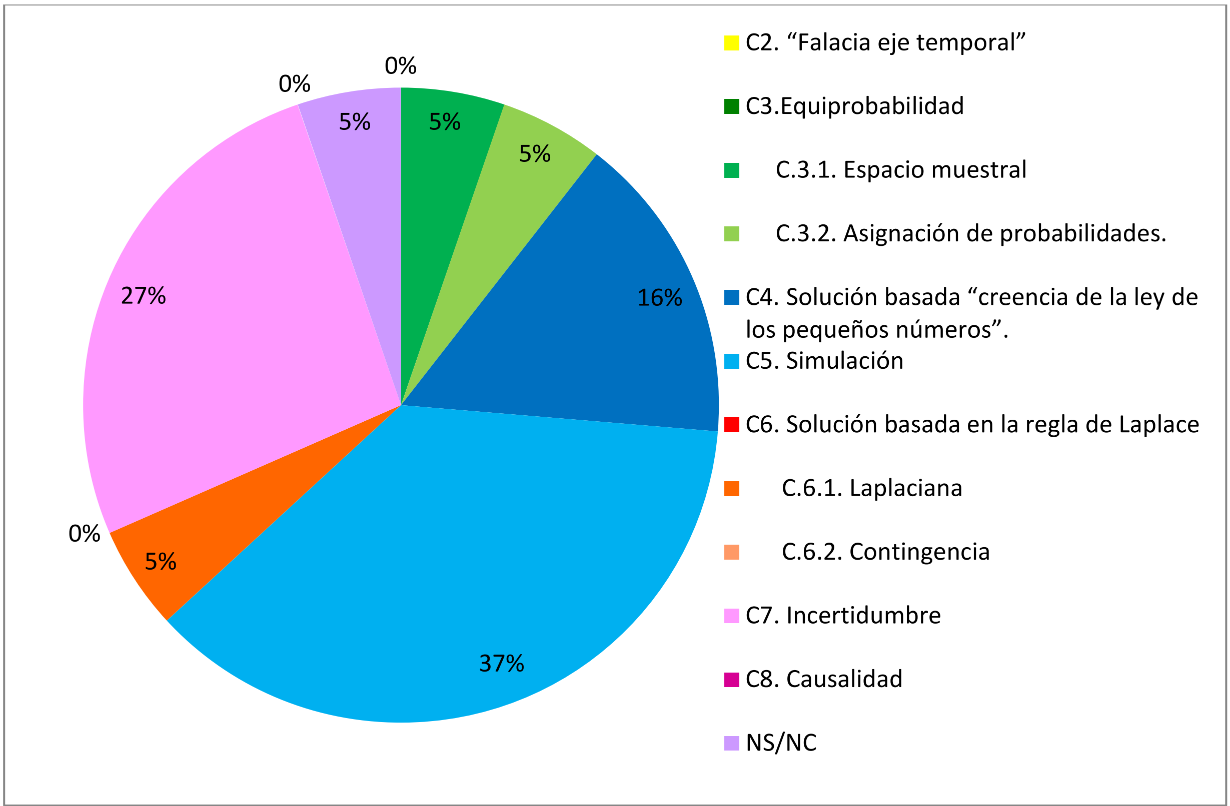
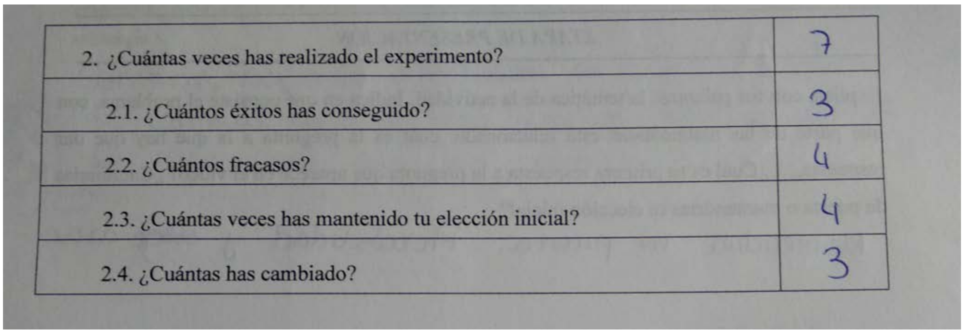


Figura 9. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O A en la primera etapa

Vemos como en el curso de 4ºE.S.O A destacan las soluciones basadas en la simulación como las más frecuentes, con un 36.84%. Estas respuestas se argumentan en función de los resultados obtenidos en su experiencia personal con la app. Un ejemplo de ello se muestra en la *Figura 9*, donde el alumno justifica su decisión en la experiencia vivida con la aplicación en Geogebra.



2. ¿Cuántas veces has realizado el experimento?	7
2.1. ¿Cuántos éxitos has conseguido?	3
2.2. ¿Cuántos fracasos?	4
2.3. ¿Cuántas veces has mantenido tu elección inicial?	4
2.4. ¿Cuántas has cambiado?	3

Figura 10. Respuesta de la pregunta 2 de la primera etapa del alumno 4C14

A partir de ello argumenta que: "*Al principio estaba convencida de que mantener la respuesta era la mejor opción, pero cada vez que confiaba en mi suerte me tocaba la cabra. Definitivamente es mejor cambiar (en mi caso) cada vez que cambiaba me tocaba el coche*" (Alumno 4C14). Observamos por tanto, que guarda relación este tipo d respuestas con la "ley de los pequeños números" ya que como observamos, el número de veces que es simulada la paradoja por el alumno no es lo suficientemente alta como para sacar conclusiones. Esta concepción es bastante alta en este grupo con un 15.78%, en relación con el resto de respuestas. En este curso, también muchos alumnos lo consideran aleatorio, como sucede en el curso de 4º E.S.O C, pero en este caso el porcentaje de alumnos que lo afirman es del 26.32%, en lugar del 50% que presentaba el grupo-clase C, como analizaremos posteriormente.

Para el curso de 4ºE.S.O B presentamos el siguiente diagrama.

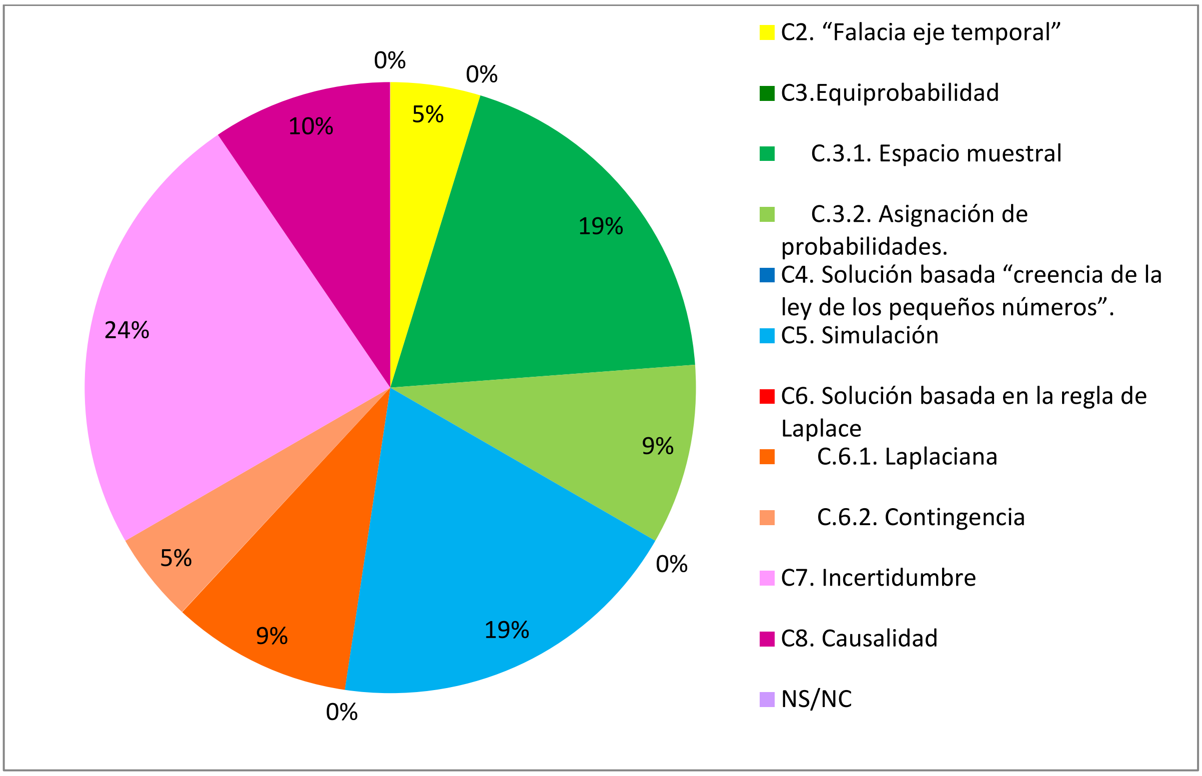


Figura 11. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O B en la primera etapa.

Por su parte en el grupo de 4º E.S.O B, las respuestas están repartidas entre aquellas basadas en el azar, y las basadas en la simulación y las basadas en una mala comprensión del espacio muestral, estás últimas con casi un 20% de los afirmando cada una de ellas. Al igual que en el curso anterior, la basadas en la simulación proceden de la experiencia como vemos en la siguiente afirmación del alumno 4B17: "*Yo he cambiado 10 veces y he conseguido más coches que cabras, manteniendo mi decisión he conseguido más cabras que coches*". Sin embargo, las relacionadas con el azar no tienen sustento alguno en ninguna evidencia o experiencia que hayan vivido y de la simulación que ha realizado no sacan ninguna conclusión. Por ello son frecuentes las afirmaciones tales como: "*No hay estrategia, es totalmente aleatorio*" como expresa el alumno 4B12. Esto se debe bien por no poder simularla un número suficiente de veces como para poder sacar conclusiones, o bien por no prestar atención en las sucesivas repeticiones que estos realizan, sin prestar atención a si realizaban cambio de puertas o no, y cuantas veces cambiando obtenían el premio. En cuanto a la basadas en una mala concepción del espacio muestral, es normal que sin conocimiento previo en estadística y tal como ya estudió Batanero, Fernandes & Contreras (2009) es uno de las posibles dificultades que podían encontrarse lo estudiantes. Puede observarse en la *Figura 10*, como el alumno considera que una vez abierta una de las puertas, las probabilidades de ganar el premio se reparte a partes iguales, sin tener en cuenta la puerta abierta por el presentador, que recordamos sabe en todo momento donde está el premio, y que siempre abre una puerta no premiada.

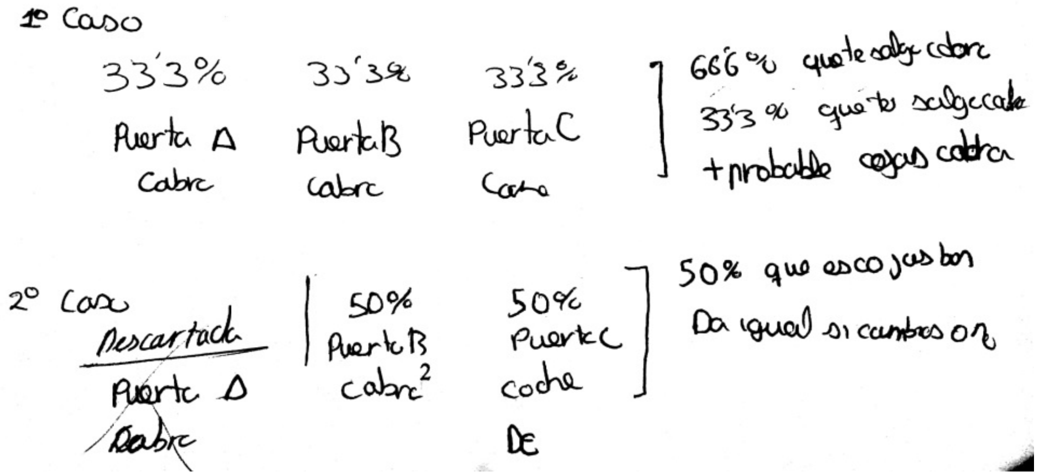


Figura 12. Respuesta a la pregunta 3 de la primera etapa del alumno4B2

Por último, en esta primera etapa, en el grupo de 4ºE.S.O C, los alumnos consideran que cambiar de puerta o mantener su elección cuando se le da la oportunidad, es una estrategia basada en el azar y la incertidumbre y que no existe una causa, motivo o fundamento detrás de ella.

Lo anterior se ve reflejado en el diagrama siguiente:

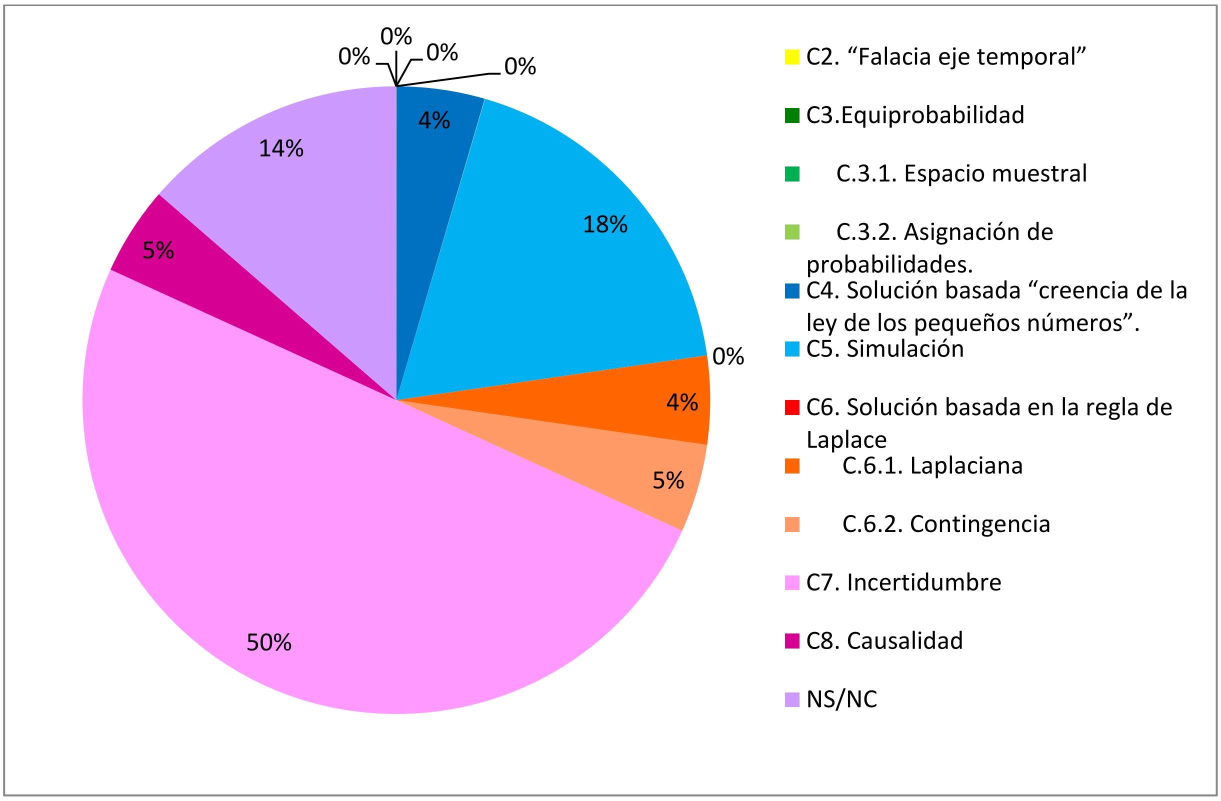


Figura 13. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O C en la primera etapa

Como hemos comentado, destaca fundamentalmente las respuestas basadas en el azar, donde la mitad de los alumnos consideran que mantener o cambiar de puerta es indiferente, dando lugar a que la mayor de los alumnos tenga una concepción de incertidumbre. Por ello, muchos alumnos afirman que: "*Mi respuesta es que el azar rige el juego. Es aleatorio. Sin embargo, creo que mantener la opción es mejor porque es el primer instinto que ha dado*" (Alumno 4C3). O se dejan llevar por su intuición como el estudiante número 18 que defiende que la estrategia que ha seguido para ganar el premio ha sido "*Escoger mi número favorito*", u otros que dicen "*confiar en mi instinto*" (Alumno 4C5) como forma estrategia del juego. Las otras dos respuestas mayoritarias son las basadas en la simulación, y un 13% de alumno que no saben o contestan a esta parte del taller. En cuanto a la simulación, alguna respuesta que lo corroboran, es "Al principio ganaba pero luego me di cuenta que manteniendo ganaba más" (Alumno 4C4) que no siempre les ha llevado a la solución correcta.

Resumen de datos de la primera etapa

En el siguiente diagrama se muestra un resumen de las diferentes respuestas que los alumnos han dado en la primera etapa analizada para los tres grupos con los que hemos trabajado.

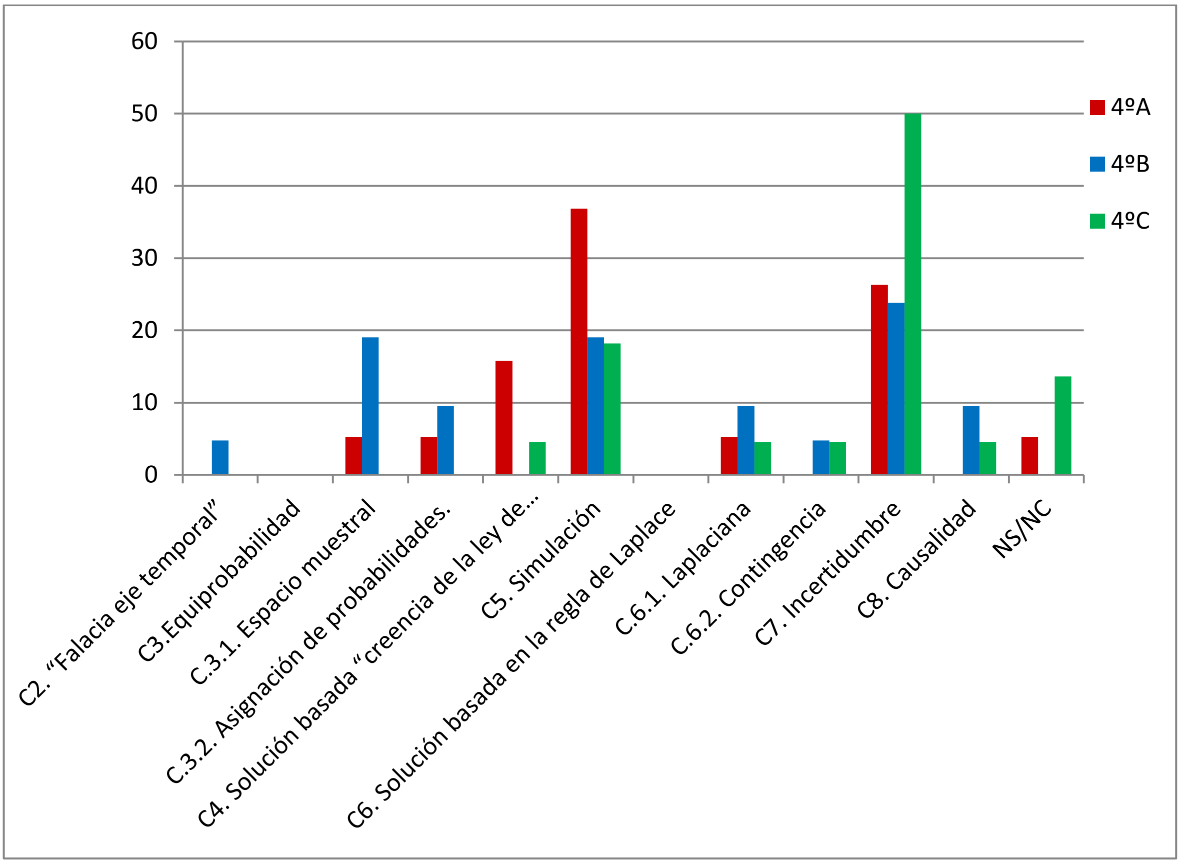


Figura 14. Resumen de soluciones en la primera etapa de la actividad

4.1.3. Análisis de otros aspectos

Como ya comentamos en la sección sobre metodología, hemos recogido otros aspectos a través del portafolio, como son la influencia del número de puertas en la paradoja y la cual es la mejor elección, si mantener o cambiar de puerta, en el momento que el presentador te da la opción de hacerlo. Así, los resultados obtenidos para los tres cursos en la primera etapa con tres puertas en la simulación de la paradoja son los presentados en la Tabla 4.

Tabla 4. *Otros aspectos recogidos en la primera etapa de la actividad*

Categoría	**Curso**					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
O1.Influencia del número de puertas	9	47,37	6	28,57	9	40,91
O2. Elección						
O2.1. Mantener	4	22.23	9	42,86	8	36,36
O2.2.Cambiar	14	77.78	11	52,38	10	45,46
NS/NC	1	21,05	1	4,76	4	18,18
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

Si relacionamos esta Tabla 4, con lo comentado anteriormente, en el curso de 4º E.S.O A, donde el 37.84% de los alumnos daban la solución argumentando la simulación realizada, un

77.78% de los mismos consideran correcta, lo cual indica como dicha simulación ha favorecido en la mayoría de los casos a considerar cambiar de puerta como solución. Si es cierto que, como vimos en la tabla anterior, estas respuestas no están fundamentadas matemáticamente sino que se basan principalmente en la experimentación. En este mismo grupo, la influencia del número de puertas es afirmativa para casi el 50% de los estudiantes, se trata de un 47.37 %, valor que tendremos en cuenta al final, para realizar una visión global de cómo ha afectado la misma en la toma de decisiones de los estudiantes. En esta primera etapa, la influencia de puertas no nos aporta mucha información en torno a las respuestas que los alumnos dan, pero servirá para ver la evolución de los mismos en las sucesivas partes en las que se dividieron las sesiones. En 4º E.S.O B, la influencia que el número de puertas tiene sobre la actividad es del 28.57%. En este grupo, la respuesta final se encuentra divida casi a la mitad entre mantener y cambiar de elección. En la clase de 4º E.S.O C un 45% de los estudiantes considerar que cambiar es la mejor opción, pero recordamos que esta elección está generalmente basada en el azar como podemos ver en la Tabla 3. En este mismo grupo, el porcentaje de alumnos que considera que el número de puertas de la paradoja influye en la elección de mantener o cambiar de puerta es de un 40.91%. Pueden verse los resultados de manera más gráfica en la *Figura 15*.

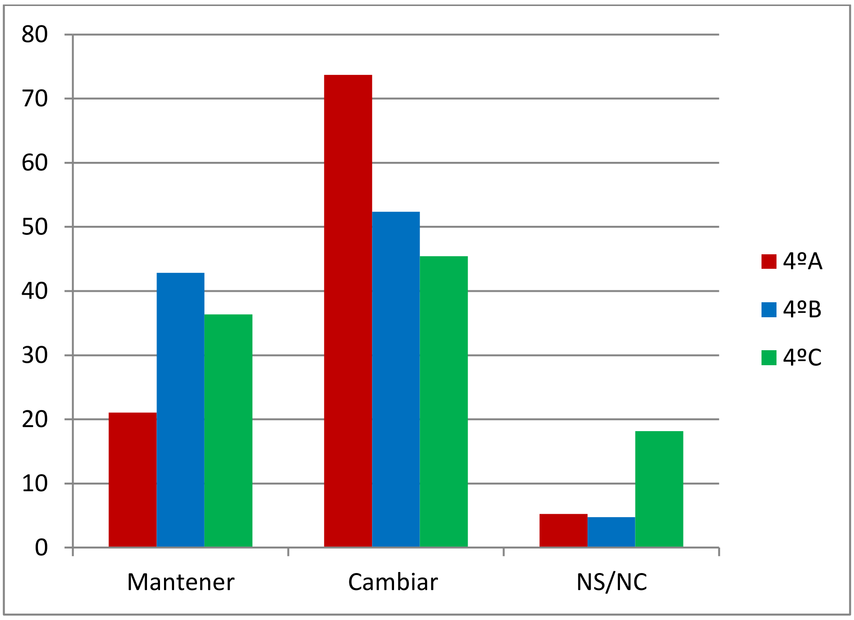


Figura 15. Resultados de elección en la primera etapa

Al igual que ocurre con el la forma de expresión de resultados, para el caso de la influencia de las puertas, encontramos una comparación en la evolución de este ítem a lo largo de las tres etapas y para cada uno de los grupos, en el Anexo IV de esta investigación.

4.2. Análisis de resultados de la segunda etapa

Para la segunda etapa procederemos de la misma forma que el caso anterior, en primer lugar vamos a realizar un análisis de las respuestas del alumnado, dando un resumen final de datos de la misma. Posteriormente, veremos el análisis de la expresión de dichas respuestas y finalmente, otros aspectos recogidos a partir del portafolio. Siempre haciendo una reflexión respecto al desarrollo y evolución de los argumentos dados por los estudiantes.

4.2.1. Análisis de respuestas de la segunda etapa

Pasando a la segunda etapa, en la tabla 4 se observan las respuestas en función de nuestro sistema de categorías elaborado, en los tres grupos. En esta etapa la simulación se realiza con 4 y 5 puertas a través del atrezo elaborado para llevar a cabo la paradoja en el aula.

Tabla 5. *Respuestas en la segunda etapa de la actividad, elaboración propia*

Categoría	**Curso**					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
C2. Solución basada en la “falacia eje temporal”	1	5,26	0	0	0	0
C3. Solución basada en la equiprobabilidad						
C.3.1. *No comprensión espacio muestral*	3	15,79	4	19,05	2	9,09
C.3.2. *Incorrecta asignación de probabilidades*.	0	0	2	9,52	0	0
C4. Solución basada “creencia de la ley de los pequeños números”.	1	5.26	0	0	1	4,55
C5. Solución basada en simulación	2	10,52	1	4,76	5	22,73
C6. Solución basada en la regla de Laplace						
C.6.1. *Laplaciana*	3	15.79	2	9,52	3	13,64
C.6.2. *Contingencia*	3	15.79	6	28,57	3	13,64
C7. Solución basada en la incertidumbre	1	5.26	3	14,29	3	13,64
C8. Soluciones basadas en la causalidad	3	15.79	3	14,29	2	9,09
NS/NC	2	10,52	0	0	3	13,64
Total	19	100	21	100	22	100
C9. Expresión de la solución						
C.9.1. *Haciendo uso un diagrama o dibujo*	4	21,05	3	14,29	4	18,18
C.9.2. *Verbal*	10	52,63	17	80,95	12	54,55
C.9.3. *Usando lenguaje matemático*	1	5,26	1	4,76	3	13,63
NS/NC	4	21,05	0	0	3	13,63
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

Analizando la segunda de las etapas como en el caso anterior, vamos ver las modificaciones que los alumnos hacen en su razonamiento tras la simulación en el aula de la paradoja con 4 y 5 puertas.

En el grupo A, las respuestas se distribuyen de manera homogénea, donde destacan las soluciones basadas en la una mala comprensión del espacio muestral, las basadas en Laplace, tanto la laplaciana como la de contingencia y las basadas en la causalidad.

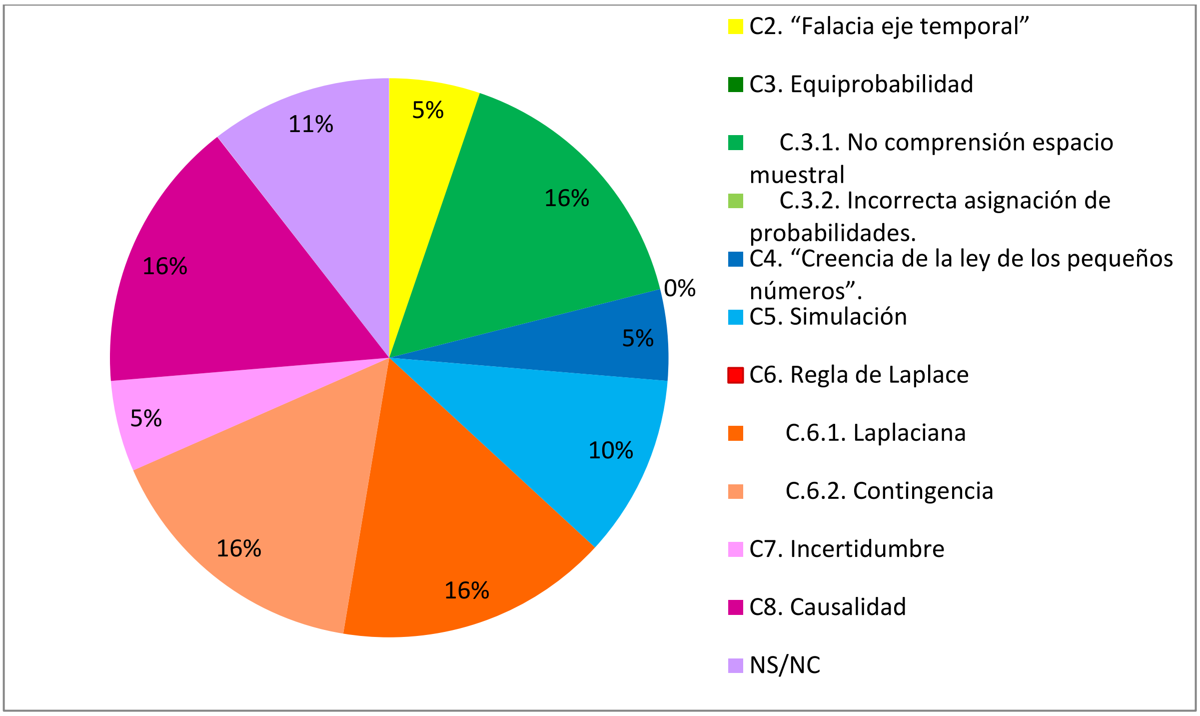


Figura 16. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O A en la segunda etapa

Es significativo ver, como aumenta el porcentaje de las soluciones más relacionadas con conceptos matemáticos como con las relacionadas con la regla de Laplace, pasan de ser casi inexistentes a un 15% aproximadamente de alumnos que hacen razonamientos en este sentido. Así, en esta etapa donde se aumenta el número de puertas la variedad de soluciones presenta diferentes vertientes y no se centran fundamentalmente en la simulación y como ocurría en este grupo en la etapa anterior.

En el curso de 4º E.S.O. B sucede algo similar que en el grupo anterior. Los razonamientos que se proporcionan, ya no están basados principalmente en simulación y la incertidumbre como consideraban la mayoría inicialmente, si no que muchos de ellos abandonan esa idea y cobran mayor protagonismo las soluciones basadas en la Regla de Laplace, haciendo un estudio de los casos favorables y totales en cada una de las etapas de la paradoja. Por ese motivo casi un 30% del alumnado da una solución basada en lo que hemos denominado solución de Laplace de tipo contingente. Puede apreciarse mejor en el siguiente diagrama.

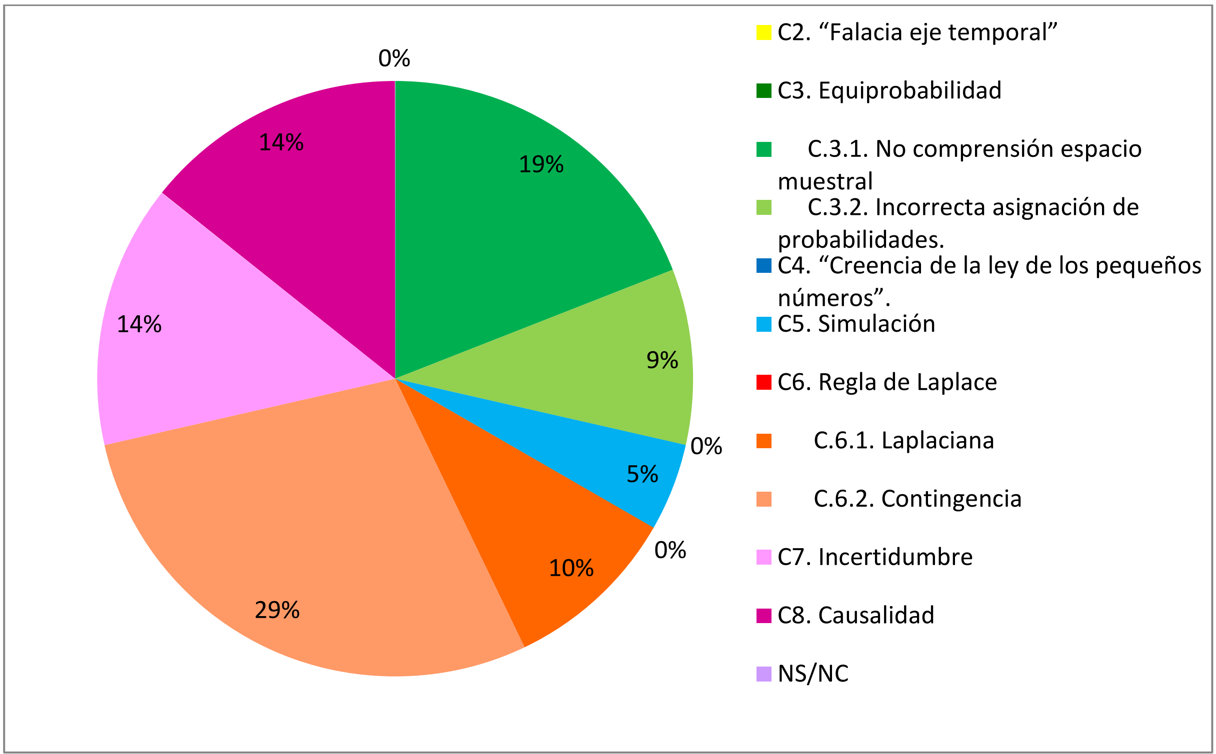


Figura 17. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O B en la segunda etapa

En el caso del curso de 4ºE.S.O. C, al igual que en los cursos anteriores la soluciones se homogenizan, pero sin embargo mucho de los alumnos se basan en la simulación como forma de argumentar su respuesta. En este caso, dicha argumentación viene en función de los resultados obtenidos en la puesta en práctica de la paradoja en el aula y en función de las repeticiones que se realizan y los resultados obtenidos en la misma. Así, podemos ver como se basan en datos recogidos en el aula como se muestra en la *Figura 12*.

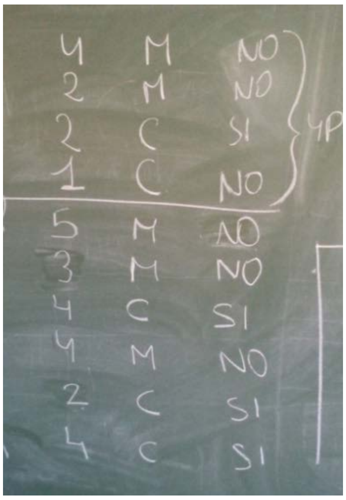


Figura 18. Resultados de los experimentos realizados en el aula con 4 y 5 puertas

En ella, vemos los resultados obtenido en el curso de 4º E.S.O. C en las diferentes repeticiones de la paradoja en el aula a partir del atrezo. Podemos ver las primeras cuatro simulaciones, correspondientes al caso de 4 puertas, y las siguientes al caso de 5 puertas. En la primera columna se encuentra el número de la puerta escogida, en la segunda columna está recogido si el alumno cambia de puerta (C) o mantiene su elección (M), y en una tercera columna, si gana o no el premio. Pues bien, en este tipo de resultados es el que se basan muchos de los alumnos de este curso, dando lugar a uno de los errores comunes que vimos en la sección 1.5.2 de este trabajo.

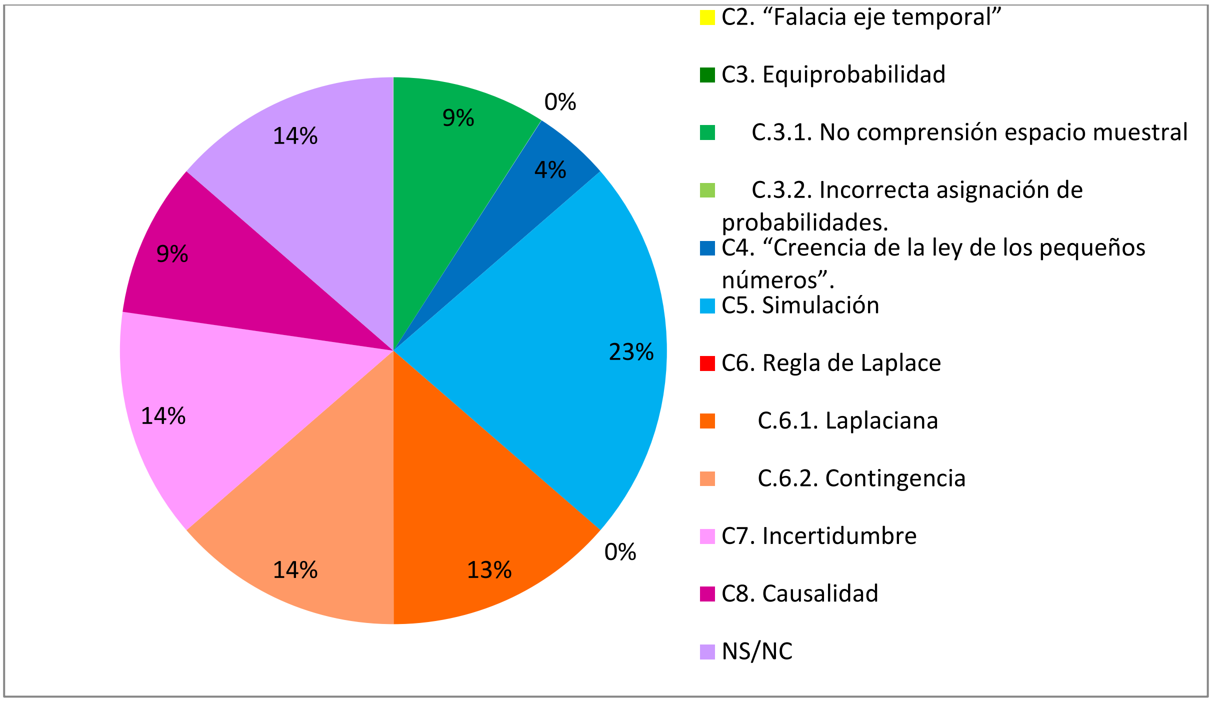


Figura 19. Diagrama sobre las respuestas del grupo 4º E.S.O C en la segunda etapa

Destacar también que son varios los alumnos que no saben dar una respuesta a la pregunta planteada o que simplemente dejan en blanco este apartado, siendo el curso donde más porcentaje de alumnos no consiguen llegar a ninguna conclusión.

Resumen de datos de la segunda etapa

En el siguiente diagrama se muestra un resumen de las diferentes respuestas que los alumnos han dado en la segunda etapa analizada para los tres grupos con los que hemos trabajado.

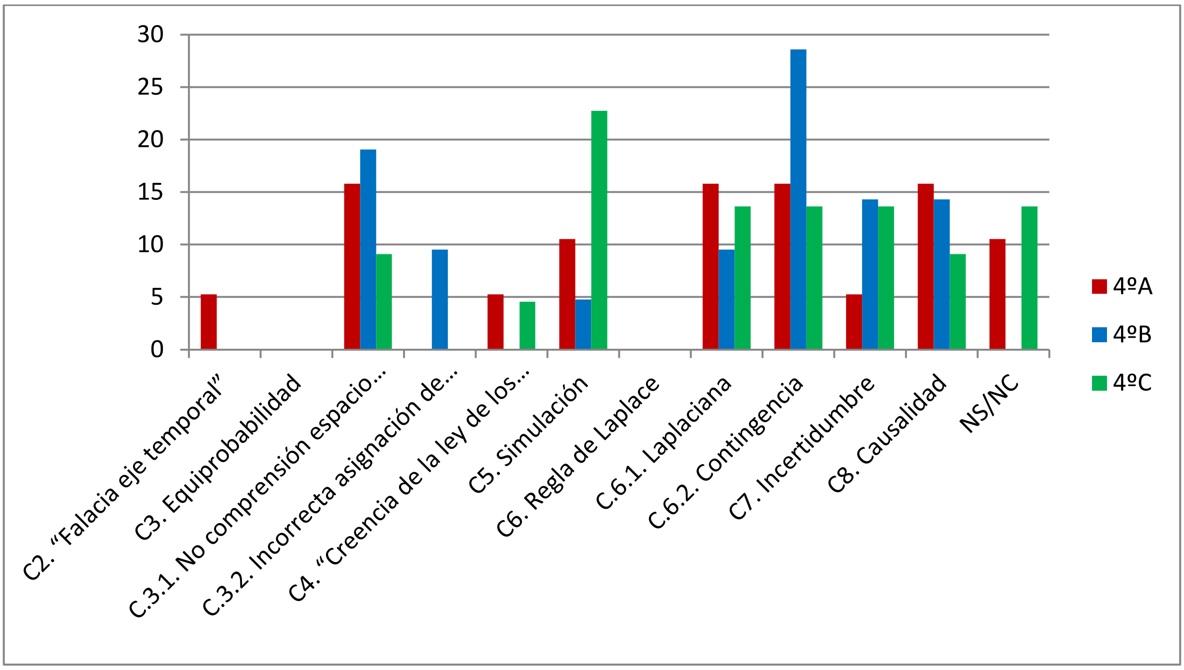


Figura 20. Resumen de soluciones en la primera etapa de la actividad

4.2.2. Análisis de la expresión de los resultados

En cuanto a la forma en la que vienen expresadas las respuestas anteriores, en el grupo de 4º E.S.O A, estos son expresados de manera verbal en su mayoría. Aunque si es cierto que aumenta el porcentaje de alumnos que utilizan dibujos y diagramas, sobre todo de los primeros, ya que son varios los alumnos que dibujan las puertas y las diferentes opciones como apoyo a su explicación. Ejemplo de ello es el siguiente estudiante.

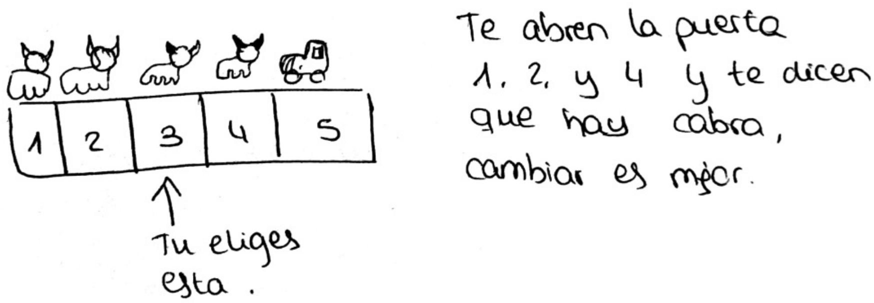


Figura 21. Solución usando dibujos del alumno 4A18

En el grupo de 4ºB, a pesar de que los resultados se comienzan a formalizar es el grupo que proporción la conclusión de manera verbal en su mayoría, ya que un 80% de los alumnos aproximadamente, la dicha solución usando sus propias palabras, sin recurrir ni a diagramas ni haciendo uso de simbología matemática.

Por último en el grupo de 4ºE.S.O C, un 54,55% de los alumnos expresan sus soluciones y estrategias de forma escrita, y es casi un 20% de los mismos los que lo hacen usando dibujos como en el caso que se muestra a continuación.

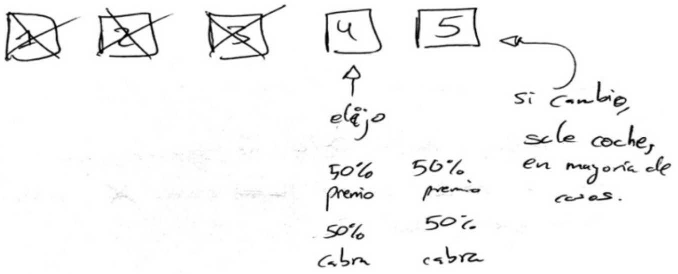


Figura 22. Solución usando dibujos del alumno 4C9

4.2.3. Análisis de otros aspectos

Al igual que en la etapa anterior, en la Tabla 6 recogemos otros aspectos de interés para nuestros objetivos en la investigación.

Tabla 6. *Otros aspectos recogidos en la segunda etapa*

	Curso					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
O1. Influencia del número de puertas	5	26,32	9	42,86	10	45,45
O2.						
O2.1. Mantener	1	5,26	9	42,86	1	4,55
O2.2. Cambiar	18	94,73	12	57,14	18	81,82
NS/NC	0	0	0	0	3	13,64
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

En esta segunda etapa, y tras todas las simulaciones tanto a través de la app como en el aula que se han realizado, el análisis de los datos que se muestra en la Tabla 6 es similar en los tres cursos. En este punto, la mayoría de alumnos en cada uno de los cursos, consideran que cambiar es la mejor opción cuando se tiene la oportunidad. La base en la que se sustentan sus argumentaciones como hemos analizado anteriormente son diversas, y en la mayoría de las ocasiones no son capaces de explicarlo de manera formal.

En cuanto la influencia que el número de puertas tiene en la paradoja, en los cursos de 4ºB y 4ºC es casi del 50%, de modo que casi la mitad de los alumnos actuarían de manera diferentes, si se les presenta la actividad con 3, 4, 5 puertas o más, algo que va en consonancia con los resultados obtenidos en la primera. En cuanto al grupo A, el porcentaje disminuye a casi la mitad. De estos resultados encontramos argumentaciones de los alumnos como la del alumno 4C11, el cual afirma que es el número de puertas influye "*porque si aumenta el número de puertas aumenta las posibilidades de elegir una puerta con cabra*". Y sin embargo, encontramos otros que argumentan que "*El número de puertas no afecta en mantener o cambiar, porque solo tienes que elegir entre dos puertas al final*" (Alumno 4B19). Se presenta así la tesitura de aquellos que relacionan el hecho de que un mayor número de puertas hace que su elección inicial sea una puerta donde no hay premio, lo cual es cierto y por lo tanto, esta argumentación refuerza el hecho de cambiar de puerta; y por otro lado, aquellos que asocian que da igual el número de puertas del experimento que al final el juego se resume en dos por puertas. En este último caso, la mayoría argumenta que las probabilidades de ganar o perder son del 50%.

4.3.Análisis de resultados de la tercera etapa

Como en etapas anteriores, analizaremos los datos de las respuestas de los alumnos, la expresión de dichos argumentos que encontramos en sus respuestas y por último, otros aspectos relacionados como son la influencia de las puertas y la elección final.

4.3.1. Análisis de datos de la tercera etapa

Recogemos los datos de la última etapa en la Tabla 7 que presentamos a continuación. En esta etapa tercera, se pregunta por el caso de 100 puertas y posteriormente se pide una generalización en el caso de que la paradoja se realizara con n puertas.

Tabla 7. *Respuestas en la tercera etapa de la actividad, elaboración propia*

Categoría	**Curso**					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
C2. Solución basada en la “falacia eje temporal”	0	0	0	0	1	4,55
C3. Solución basada en la equiprobabilidad						
C.3.1. *No comprensión espacio muestral*	1	5,26	3	14,29	0	0
C.3.2. *Incorrecta asignación de probabilidades.*	0	0	2	9,52	0	0
C4. Solución basada “creencia de la ley de los pequeños números”.	0	0	0	0	1	4,55
C5. Solución basada en simulación	0	0	0	0	1	4,55
C6. Solución basada en la regla de Laplace						
C.6.1. *Laplaciana*	4	21,05	3	14,29	4	18,18
C.6.2. *Contingencia*	1	5,26	0	0	5	22,73
C7. Solución basada en la incertidumbre	3	15,79	6	28,57	5	22,73
C8. Soluciones basadas en la causalidad	0	0	1	4,76	1	4,55
NS/NC	10	52,63	6	28,57	4	18,18
Total	19	100	21	100	22	100
C9. Expresión de la solución						
C.9.1. *Haciendo uso un diagrama o dibujo*	0	0	1	4,76	1	4,55
C.9.2. *Verbal*	9	47,37	13	61,90	17	77,27
C.9.3. *Usando lenguaje matemático*	0	0	1	4,76	0	0
NS/NC	10	52,63	6	28,57	4	18,18
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

Vemos como el número de respuestas en esta etapa disminuye con respecto a las anteriores. Este hecho es algo con lo que contábamos desde el inicio, puesto que la generalización y modelización de la paradoja en un caso general siempre es algo complicado para los alumnos. Por ello, vemos como el número de estudiantes que no dan respuesta a las cuestiones planteadas es alto. A pesar de ello en los cursos de A y C el razonamiento Laplaciano se encuentra en las soluciones principales que dan los estudiantes, sin embargo en el curso de 4º B, consideran que llegados a este punto es el azar y no pueden controlar la que ocurra en casos como 100 puertas o más. Podemos verlo de manera más gráfica en los siguientes diagramas de cada uno de los grupos. Con el mismo código de color que anteriores.

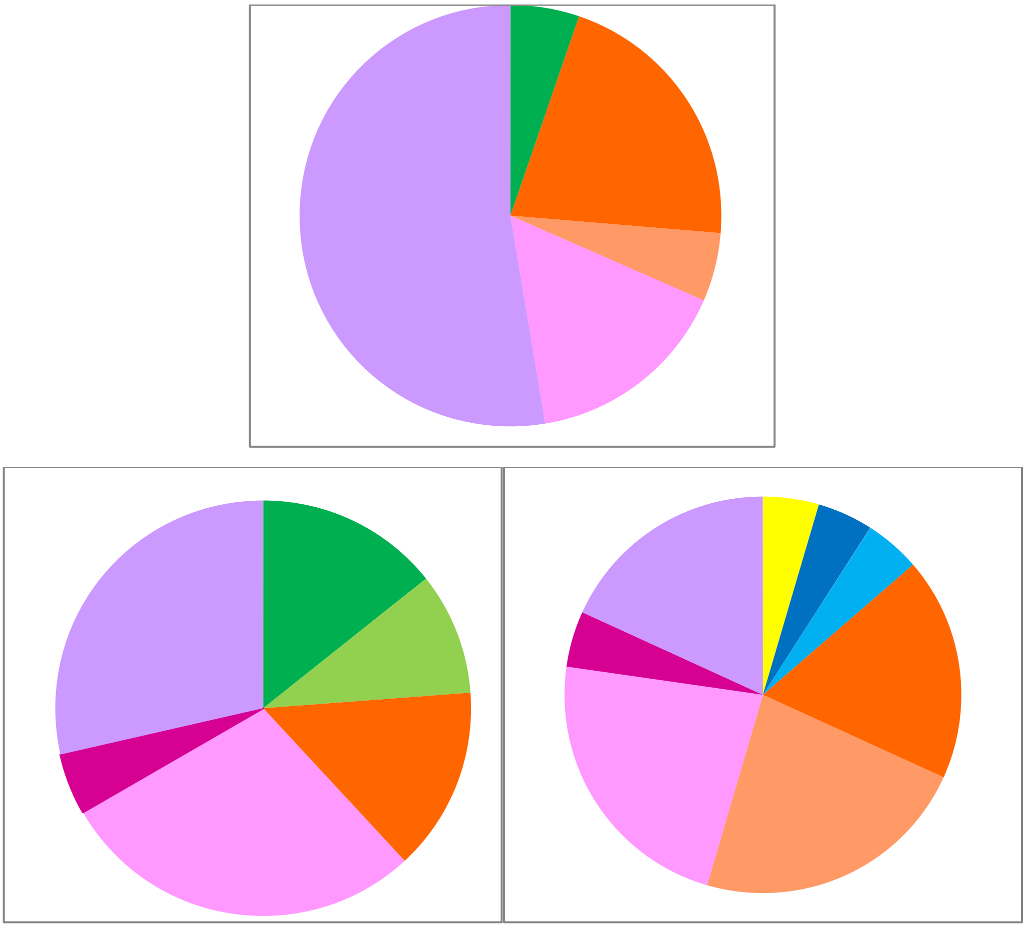


Figura 23. Diagramas circulares de las respuestas en la tercera etapa de los grupos A, B y C respectivamente

Resumen de datos de la tercera etapa

En el siguiente diagrama se muestra un resumen de las diferentes respuestas que los alumnos han dado en la tercera etapa analizada para los tres grupos con los que hemos trabajado.

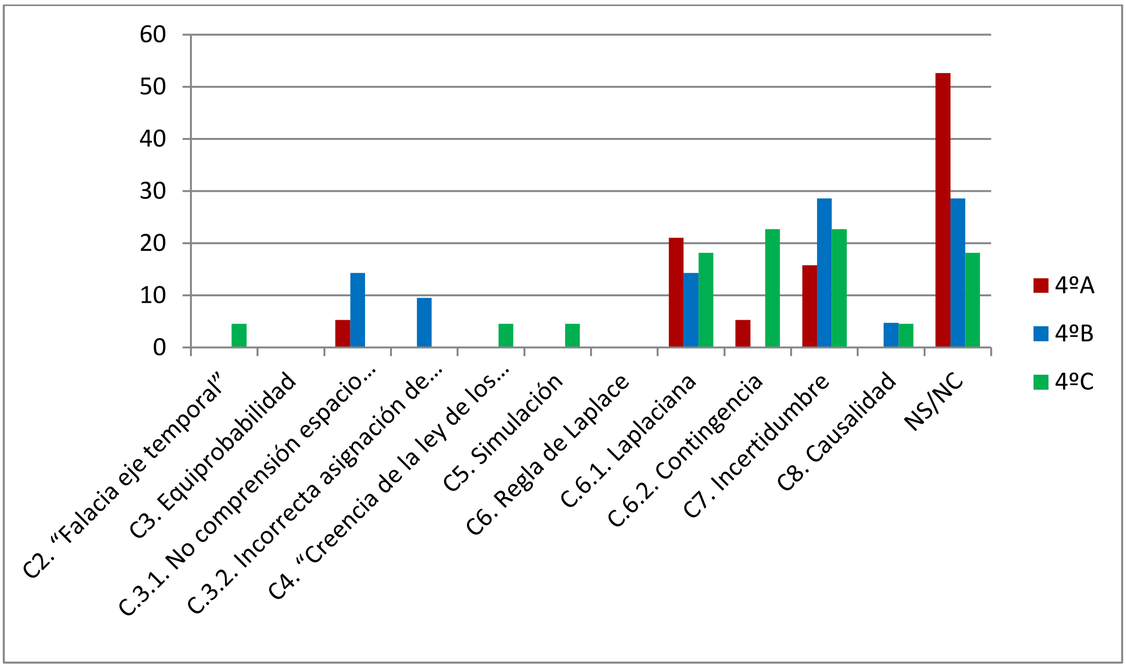


Figura 24. Resumen de soluciones en la primera etapa de la actividad

4.3.2. Análisis de la expresión de los resultados

Estas soluciones son de nuevo dadas a partir de expresiones verbales alejadas de formalismo matemático o dibujos que las expliquen, siendo los porcentajes más altos de las tres etapas donde el alumnado expresa sus respuestas de manera verbal. Un ejemplo que resume tanto el tipo de solución dada en esta etapa, como la manera en la que la expresan los alumnos es la siguiente:

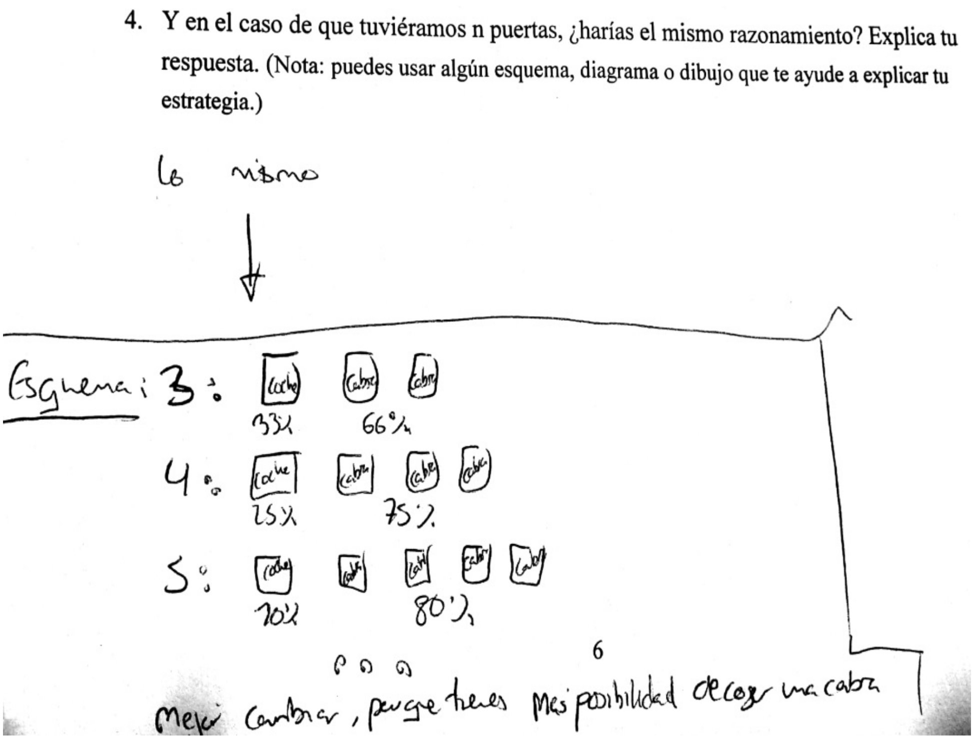


Figura 25. Diagrama en respuesta a la pregunta 4 de la tercera etapa dada por el alumno 4C14

4.3.3. Análisis de otros aspectos

Por último, otro de los ítems importantes para la investigación los mostramos en la Tabla 8. En ella, hemos recogido el parecer de los estudiantes en este caso de un número de puertas alto, para ver sí a pesar de no saber en muchas ocasiones la razón exacta de lo que sucede en la paradoja, continúan pensando en si es mejor mantener o cambiar de puerta.

Tabla 8. *Otros aspectos recogidos en la tercera etapa*

Categoría	**Curso**					
	4ºA		4ºB		4ºC	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
O2						
O2.1. Mantener	1	5,26	6	28,57	0	0
O2.2. Cambiar	11	57,89	9	42,86	18	81,82
NS/NC	7	36,84	6	28,57	4	18,18
Total	19	100	21	100	22	100

Fuente: Elaboración propia

Como podemos observar, la participación en esta última etapa, disminuye respecto a las anteriores como ya hemos comentado. Sin embargo, de entre los alumnos que sí contestan, la tendencia de respuestas que viene siguiéndose a lo largo de las etapas no varía, y sigue siendo la mayoría de estudiantes en cada uno de los grupos, los que consideran que cambiar de puerta maximiza sus probabilidades de ganar el premio en la paradoja.

4.4. Panorámica de los resultados obtenidos

A modo de resumen se ha realizado, de forma gráfica, una comparativa de la evolución de los estudiantes a lo largo de las tres etapas en cada uno de los grupos, en cuanto a sus concepciones, su elección final, y la influencia del número de puertas, además de la manera en la que expresan sus respuestas. Éstos gráficos se encuentran en el Anexo IV ya que por falta de espacio no han podido incluirse en el cuerpo del trabajo.

A partir de los resultados obtenidos podemos dar respuesta y reflexionar sobre las preguntas y objetivos que nos habíamos planteado en este trabajo. El objetivo principal de nuestro trabajo es el de estudiar el conocimiento que alumnos de 4º E.S.O tienen sobre Probabilidad, para lo que he hemos acudido a la paradoja de *Monty Hall*. Como se puede observar en la Tabla 1, establecimos una serie de dificultades, fruto de nuestra experiencia previa con la paradoja, además de las observadas por autores como Batanero, Fernandes & Contreras (2009) y por Escrich Gigante, B. G., & García (2015), los cuales analizaremos junto con los objetivos específicos de esta investigaciones y las cuestiones relacionadas con la misma.

Una vez hemos analizado las respuestas proporcionadas por los alumnos a partir del portafolio elaborado para ello, así como otros aspectos de relevancia, vamos a identificar las dificultades que los alumnos han encontrado y relacionarlas con las dificultades previas que habíamos considerado. En segundo lugar, atenderemos a los objetivos específicos y las cuestiones de investigación.

En primer lugar, en relación con la incorrecta asignación de probabilidad a las puertas, no hemos encontrado ningún alumno que presente dicha dificultad, todos ellos asignaban las probabilidades de éxito y fracaso correctamente al inicio de cada una de las simulaciones. Este hecho ha quedado constancia en la respuesta de algunos alumnos como las que se presentan a continuación. La primera figura las probabilidades son asignadas en función de porcentajes y la segunda, en función de fracciones.

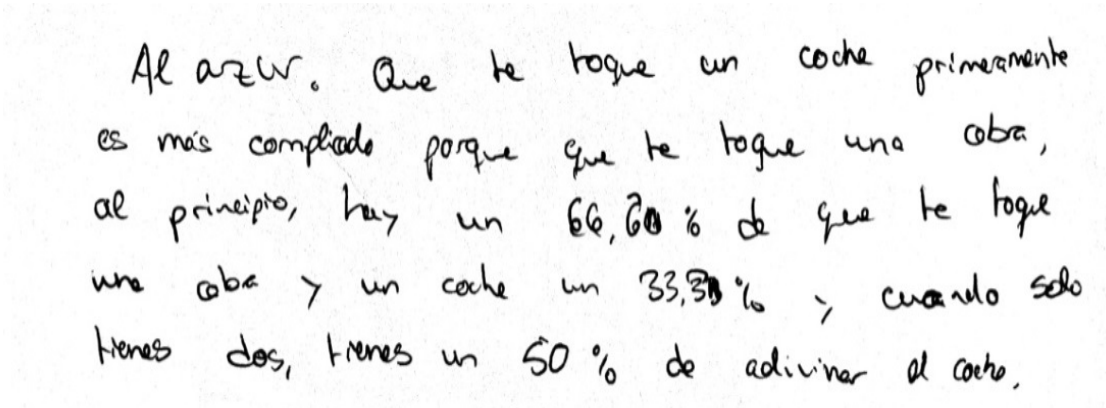

Al azar. Que te toque un coche primeramente es más complicado porque que te toque una cabra, al principio, hay un 66,60 % de que te toque una cabra y un coche un 33,30 %, y cuando solo tienes dos, tienes un 50 % de adivinar el coche.

Figura 26. Respuesta alumno 4B5

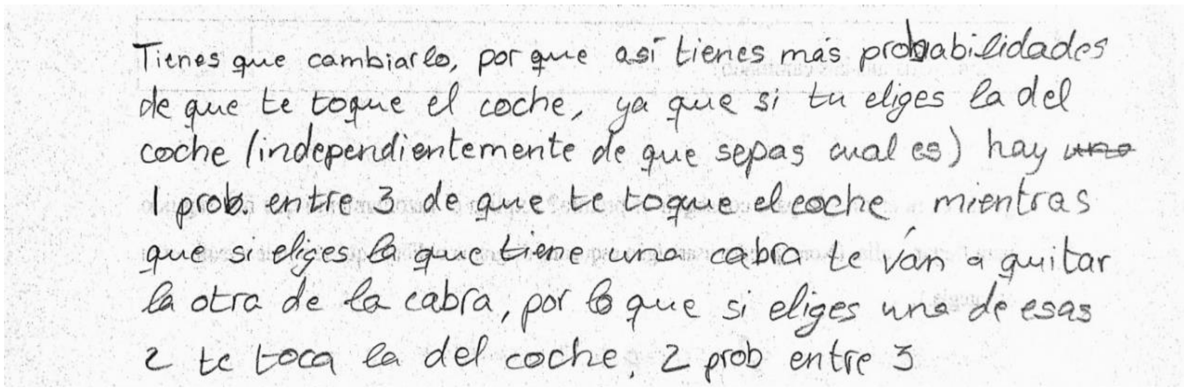
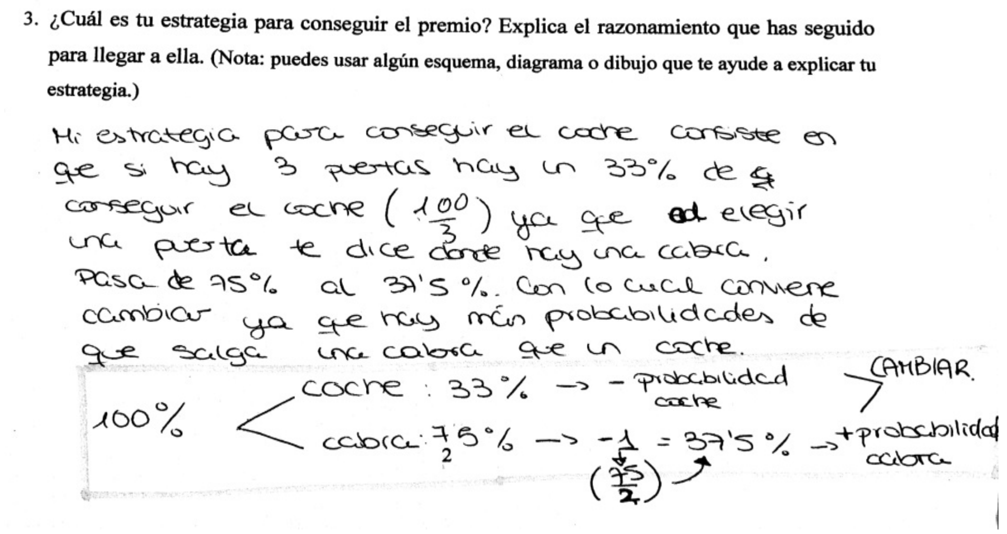

Tienes que cambiarlo, porque así tienes más probabilidades de que te toque el coche, ya que si tu eliges la del coche (independientemente de que sepas cual es) hay ~~una~~ 1 prob. entre 3 de que te toque el coche mientras que si eliges la que tiene una cabra te ván a quitar la otra de la cabra, por lo que si eliges una de esas 2 te toca la del coche, 2 prob entre 3

Figura 27. Respuesta alumno 4B16

Otra de las dificultades es la aquella de que los alumnos no tienen conocimiento de que la suma de todas las probabilidades de las puertas debe sumar 1. El significativo observar como a pesar de ello, de manera intuitiva en la asignación de probabilidades, como la que han realizado anteriormente, se encuentra de manera implícita se encuentra esta propiedad. Esta dificultad se ha visto reflejada en uno de alumnos que argumentaba que era mejor opción cambiar de puerta, ya que la probabilidad de no obtener el premio pasa de un 75% a un 37.5, como vemos a continuación.


3. ¿Cuál es tu estrategia para conseguir el premio? Explica el razonamiento que has seguido para llegar a ella. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

Mi estrategia para conseguir el coche consiste en que si hay 3 puertas hay un 33% de q conseguir el coche ($\frac{100}{3}$) ya que ~~al~~ elegir una puerta te dice donde hay una cabra. Pasa de 75% al 37'5%. Con lo cual conviene cambiar ya que hay más probabilidades de que salga una cabra que un coche.

100%
coche : 33% → – probabilidad coche → CAMBIAR.
cabra: $\frac{75}{2}$% → – $\frac{1}{2}$ = 37'5% → + probabilidad cabra
($\frac{75}{2}$)

Figura 28. Respuesta del alumno 4C15 en la primera etapa

Por su parte, en relación a cuál es la mejor decisión que tomar cuando el presentador, tras haber elegido una puerta y haber abierto una donde no se encuentra el premio, y te ofrece cambiar elección hacemos uso de los datos obtenidos en los portafolios. Los colores utilizados para los siguientes diagramas son los utilizados durante todo el trabajo, el rojo para el grupo A, el azul para el grupo B y el verde para el grupo C.

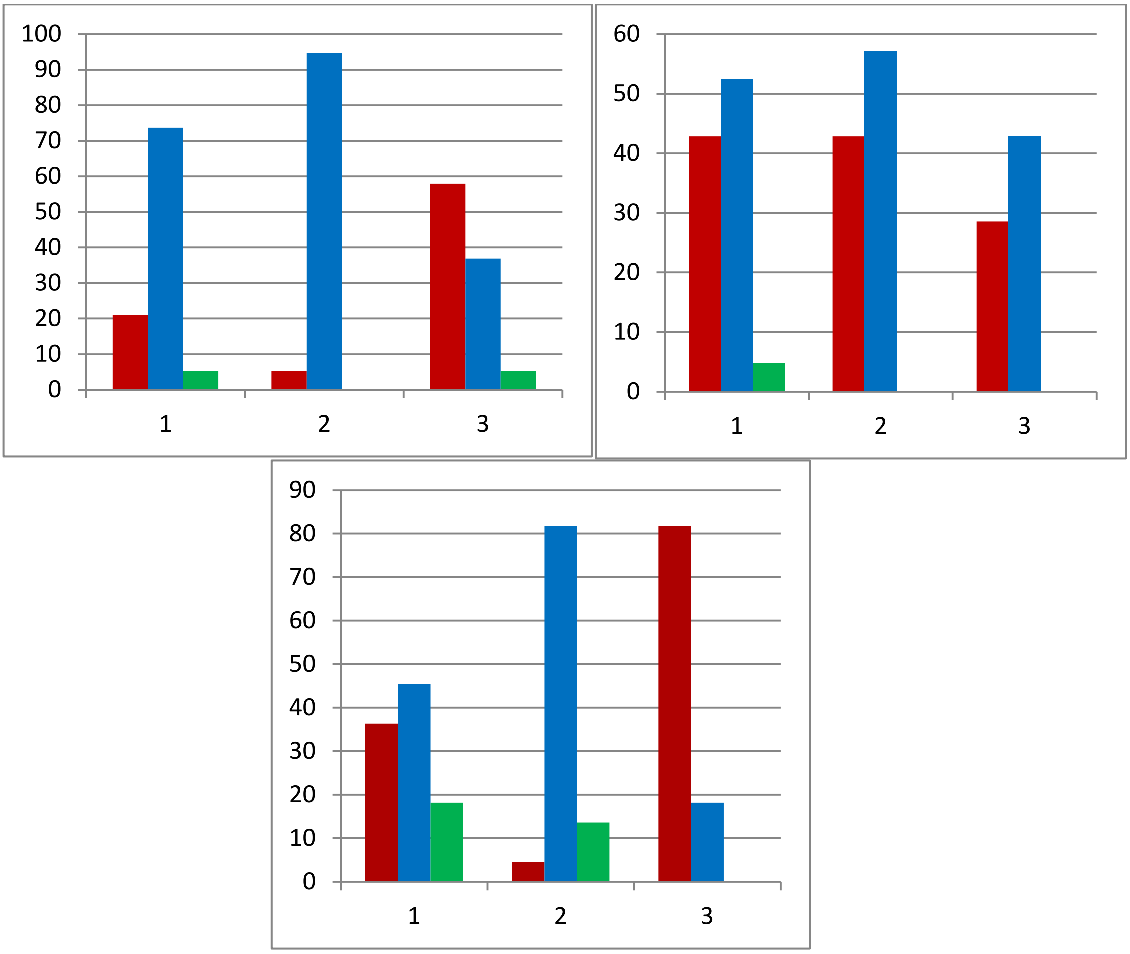


Figura 29. Comparativa elección final en 4ºA, 4ºB y 4ºC, respectivamente

Vemos en la *Figura 27*, como destacan las barras en color rojo correspondiente a la elección de cambiar de puerta cuando tienen la oportunidad de ellos. Se ve en los tres grupos como el porcentaje de alumnos que optan por esta elección aumenta tras la segunda etapa, donde ya se ha simulado la paradoja con 3, 4 y 5 puertas. Destacar como la opción de mantener cobra mayor fuerza en la última etapa, donde los alumnos deben generalizar la paradoja al caso de n puertas, siendo mayor que la opción de cambiar de puerta en el caso del grupo C y A. Se observa en la última etapa una gran diferencia entre las dos opciones en el grupo 4ºE.S.O C. Destacar que, en esta etapa 3 se dan los mayores porcentajes de no respuesta, y que por lo tanto los alumnos no han contestado a la pregunta del portafolio correspondiente o simplemente no saben si es mejor opción mantener la puerta o cambiarla, se da en la primera etapa del taller. Encontramos relacionado con ello afirmaciones como la siguiente: "*yo creo que escojas la que escojas es suerte, y a veces manteniendo tienes suerte y otras cambiando ganas*" (Alumno 4A12). En este grupo, en la primera etapa, un 26% de los alumnos basaban su respuesta en la incertidumbre, estando estos resultados en consonancia con la dificultad que algunos estudiantes han encontrado a la hora de tomar una decisión.

Muchas de las respuestas que han dado los alumnos, han estado basadas en la incorrecta interpretación de la paradoja una vez el presentador abre las puertas mostrando tras ellas que no se encuentra el premio, como ya adelantamos en el apartado de posibles dificultades. Este error se corresponde con la categoría C2 de las respuestas basadas en "falacia eje temporal", en la que no se tiene en cuenta la apertura de dicha puerta. Algunos de los razonamientos que nos permiten identificar dicho error es el que muestra un alumno del grupo B: "*me han hecho dudar y he llegado a la conclusión que tienes desde el principio un 50%, ya que sabes que te van a quitar una cabra, con lo que siempre vas a acabar eligiendo una cabra o un coche*" (Alumno 4B11) o el alumno 4A8: "*no importa mantener o cambiar, porque siempre en la que te abre el presentados va a haber una cabra y va a ser un sorteo entre 2 puertas*". En sus razonamientos se detecta cómo no tienen en cuenta que la probabilidad de la puerta que se abre es cero en el momento que el presentador muestra que no se encuentra el premio tras ella. Y por lo tanto, esa probabilidad se encuentra tras la puerta que no se ha elegido, en el caso de 3 puertas. En el caso de 4 y 5 puertas de manera similar, pero en este caso se abren 2 y 3 puertas respectivamente. Otro ejemplo de ello es el siguiente:

1º
33'3% Puerta A Cabra
33'3% Puerta B Cabra
33'3% Puerta C Coche
→ 66'6% Cabra
→ 33'3% Coche
> probabilidad → Cabra

2º
~~Puerta A Cabra (Descartada)~~
50% Cabra
50% Coche

2

Figura 30. Respuesta alumno 4C0

Este error se encuentra estrechamente relacionado con la categoría 3 que establecimos en nuestro sistema de categorías, solución basada en al equiprobabilidad. Ésta categoría la dividíamos en dos, por un lado aquella no comprensión del espacio muestral, y por otro, una incorrecta asignación de probabilidades. Se considera, en ambos casos que existe un 50% de posibilidades una vez que se abre la puerta como es el caso del alumno 4B11 (*Figura 26*), pero también de otros que afirman lo que podemos observar en la siguiente figura:

Si hay 3 puertas hay un 33% de que toque el coche y un 67% de que toquen cabras. Si te enseñan 1 puertas hay una probabilidad de 50% de que te toque cabra o coche.
Si hay 4 puertas hay un 25% de que toque el coche y un 75% de que toque cabra. Si te dan 2 puertas con 2 cabras vuelves a quedarte en un 50% de que haya cabra y/o coche.
Si hay 5 puertas hay una ~~pr~~ 20% de probabilidad de que toque el coche y un 80% de que toque cabra. Si te enseñan 3 puertas con cabras vuelves a tener un 50% de probabilidad de que toque coche o cabra.

4

Figura 31. Respuesta alumno 4C16

Este tipo de razonamientos no es de los más frecuentes en el desarrollo del taller, pero donde de 4 a 6 alumnos dan sus razonamientos basados en estos errores. Además, estos disminuyen a medida que las etapas trascurren, siendo el porcentaje mayor en la primera y segunda etapa.

La simulación, como hemos analizado con anterioridad, sí es uno de los fundamentos en los que basan sus respuestas los alumnos, sobre todo en la primera etapa de simulación con

Geogebra. Esto lleva a otras las dificultades previas que establecimos como es la de tomar decisiones a partir de haber realizado la paradoja un número insuficiente de veces, y es lo que denotábamos como incorrecta convergencia. Guarda relación con la categoría C5, por el hecho de dar razonamientos basados en dicha simulación, pero sobre todo C4, y la "*ley de los pequeños números*". Algunas de las respuestas que corroboran esta dificultad detectada son las siguientes afirmaciones realizadas por los alumnos: "*antes de hacer ningún intento pensaba que había que mantenerse, pero después de hacerlo dos veces pensé que era mejor cambiar siempre*" (Alumno 4A10), un estudiante que ha simulado con la aplicación la paradoja tres veces y que obtiene esta conclusión en la segunda etapa tras haberlo realizado en clase un par de veces.

Por último, entre las dificultades marcadas inicialmente encontramos una que fue observada en la experiencia de la Semana de la Ciencia y la Tecnología, donde pude trabajar la paradoja con diferentes grupos. Al final de estos pequeños talleres, cuando se explicaba la paradoja para un caso extremo, era realmente cuando lo alumnos comprendían que la mejor opción era cambiar de puerta, cuando el presentador te brindaba dicha posibilidad. En nuestro caso, para contrastar tal afirmación recurrimos a los datos recogidos y analizados. Como ya hemos visto en la primera etapa los porcentajes entre elegir y mantener se encuentran más igualados. Sin embargo, la opción de cambiar de puertas se desmarca con el aumento a 4 y 5 puertas en la segunda etapa. Por su parte, el llevar al caso extremo el número de puertas no ha resultado beneficioso con estos grupos, ya que la mayoría de respuestas de los alumnos en dicha etapa es la de mantener, salvo en el grupo de 4ºE.S.O B, donde más de un 40% de los alumnos optan por la opción de cambiar la puerta, tras su primera elección. Si es cierto, que la participación en esta última etapa es escasa, y por lo tanto, la conclusión que se puede sacar al respecto se encuentra algo sesgada. Además aquellos alumnos que argumentan en la tercera etapa que cambiar de puerta es la mejor opción, basan su razonamiento en que "*…es más difícil elegir una puerta con premio entre 100 puertas que entre 3*" (Alumno4B5), lo que deja ver como el caso extremo establece una relación con la influencia del número de puertas y las probabilidades de conseguir el premio de manera implícita. Es significativo también que, los alumnos que desde la primera etapa realiza un razonamiento correcto, continua con él durante las sucesivas etapas, así nos encontramos con respuestas en la tercera etapa como es la siguiente "*elijo la puerta 1, y el presentador quita 98, luego quedan 2 puertas, por lo que 50% de ganar o perder*"(Alumno 4C9), cuando se le pregunta por el caso de 100 puertas, y presenta la siguiente conclusión para el caso de n puertas: "*Si n>1, hay un 50% de probabilidades de ganar, ya que si n>2, siempre abren x puertas hasta que quedan 2*"

(Alumno 4C9). Este alumno a pesar de cometer un error relacionado con la "*falacia eje temporal*", mantiene este razonamiento a lo largo de todo el proceso, pues este mismo alumno realizaba un razonamiento similar. En la primera y segunda fase llegaba a la misma conclusión a través de la simulación y afirmaba en la primera etapa que : "elijo una puerta y luego cambio, porque la mayoría de mis cambios han sido éxito "(alumno 4C9), y en la segunda etapa que la mejor opción era cambiar de nuevo ya que: "*la mayoría que cambiaban ganaban el premio*"(Alumno 4C9).

5. Resultados de la exploración

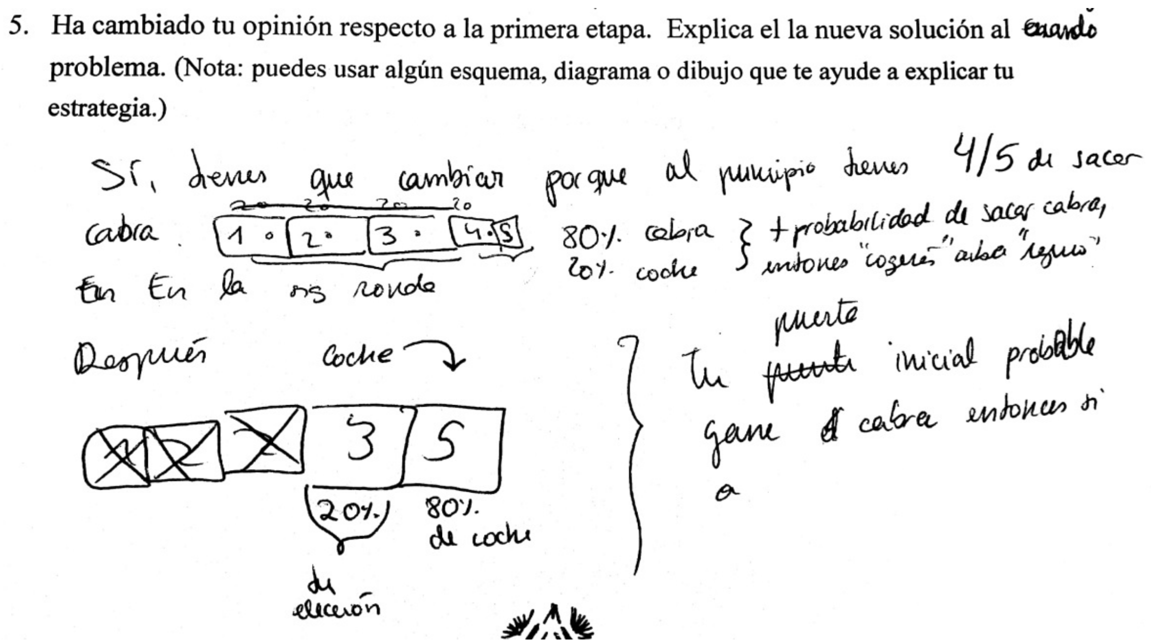
5.1. Análisis de objetivos

Analizamos a continuación lo objetivos específicos que nos marcamos en el capítulo 2 de esta investigación. El primero de ellos era el de examinar las diferentes soluciones que los alumnos nos proporcionaran. Estos resultados han sido ya analizados con ayuda del portafolio al inicio de este capítulo.

En segundo lugar, establecimos el objetivo de identificar las dificultades conceptuales, sobre todo aquellas relacionadas con la probabilidad condicional. De nuevo hemos ido analizando las dificultades previas que establecimos en el apartado 4 del capítulo 1 de este documento. Tras la mayoría de ellas se encuentra una mala concepción o ni siquiera tener conocimiento del concepto de probabilidad condicionada. Este hecho se ve reflejado en que pocos alumnos han sabido dar una respuesta correcta a la paradoja, como hemos visto en el análisis de resultados. Además, muchos de las tendencias de pensamiento que se ven reflejadas en sus respuestas, tales como la relacionada con "*falacia de eje temporal*", como en las respuestas basadas en una mala concepción del espacio muestral y aquellas que definíamos como soluciones basadas en la contingencia, lleva implícitamente dicho concepto de probabilidad condicionada erróneo.

El tercer objetivo específico que nos marcamos era estudiar cómo el aumento del número de puertas repercutía en las respuestas de los alumnos, que de nuevo hemos analizado anteriormente y que de lo cual no hemos podido obtener grandes conclusiones debido a la baja participación de los estudiantes en esta tercera etapa.

Como cuarto objetivo nos propusimos ver el progreso de un alumno a lo largo de las tres etapas, para ver la evolución que este presenta en cuanto a sus razonamientos en las respuestas. Como ejemplo de evolución vamos a mostrar el seguimiento de los razonamientos de un alumno a lo largo de todo el taller. Se trata del alumno 4C3. Este alumno en la primera etapa proporciona la siguiente respuesta en relación con opción de mantener o cambiar de puerta: "*Mi respuesta es que el azar rige el juego. Es aleatorio. Sin embargo, veo que mantendría mi opción porque es el primer 'instinto' que me ha dado*" (Alumno 4C3). Este alumno, realiza el experimento con la aplicación 16 veces de las cuales la mitad gana el premio y la mitad lo pierde. Cuando se le pregunta sobre la comparación de resultados con los compañeros, argumenta que no ha cambiado su postura, luego sigue creyendo que mantener es la mejor opción. Sin embargo, cuando llegamos a la segunda etapa sus argumentaciones comienzan a ser más formales. En el caso de 4 puertas, cuando se le pregunta sobre la si el número de puertas influye en la elección, afirma: "*Sí, porque hay más opciones y dudas cual coger*". En esta misma parte del taller, argumenta que de las dos opciones: "…*mantener me ha dado suerte, pero a los demás mantener=cabra y cambiar =coche. Creo que simplemente tienes que hacer lo que te venga a la cabeza en el momento*", de donde se observa que su respuesta se basa en la simulación realizada en clase. Sin embargo a ello añade: "*Es según la probabilidad. Al principio tienes 4/5 de sacar la cabra entonces seguro que coges una cabra como elección inicial, pero cuando te dan la opción de cambiar sólo hay dos puertas, entonces es mejor cambiar*", dando una respuesta basada en la regla de Laplace. A este razonamiento añade el siguiente dibujo:


5. Ha cambiado tu opinión respecto a la primera etapa. Explica el la nueva solución al ~~cuando~~ problema. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

Sí, tienes que cambiar porque al principio tienes 4/5 de sacar cabra.
20 20 20 20
1 · 2 · 3 · 4 · 5
80% cabra
20% coche
+ probabilidad de sacar cabra, entonces "cogerás" cabra "seguro"
~~En~~ En la ~~ns~~ ronda
Después
coche
3 5
20% de elección
80% de coche
Tu ~~puerta~~ puerta inicial probable gane ~~el~~ cabra entonces si a

Figura 32. Respuesta alumno 4C3 en la segunda etapa

En la figura podemos ver como el alumno tras realizar el experimento en clase cambia de opinión, basándose en ello argumenta su respuesta, lejos del azar que consideraba en la primera etapa y dando la respuesta usando la regla de Laplace.

Cuando se le pregunta por el caso de 5 puertas, su argumentación es idéntica, de manera que cuando se le pide generalizar en la tercera fase, continua pensando que cambiar es la mejor opción que tomar. Se ve reflejado en su respuesta la comprensión de cómo a mayor número de puertas, mejor es la comprensión de la paradoja, pues comenta: "*Con 100 puertas es aún más evidente que habría que cambiar*". En el caso de n puertas, argumenta de manera que idéntica que en la etapa dos, con el matiz de que n no puede valer 2. Así, vemos la evolución de un alumno que tras su propia experiencia, la realizada en el aula y el debate con el resto de compañeros presenta una evolución en su respuesta, que inicialmente consideraba azarosa y que llega a fundamentar posteriormente.

Como quinto objetivo se encontraba el de estudiar cómo el debate que se plantea en las dos primeras etapas influye en el cambio de opinión de los alumnos. Estos debates se encuentran influenciados por la disposición de los alumnos en el aula, como podemos ver recogido en el diario realizado que se encuentra en el Anexo III de este documento. Así, algunas de las respuestas que los alumnos proporcionan en cuanto al cambio de opinión respecto a su experiencia y tras compartirla con sus compañeros son en general, que no cambian de opinión y otras la argumentan diciendo: "No he cambiado de opinión porque pienso que es suerte y azar. Mis compañeros han dicho que es probabilidad y que hay que hacer cálculos". Sin embargo muchos de ellos, tras el debate si lo hacen. Algunas de las respuestas más significativas son:

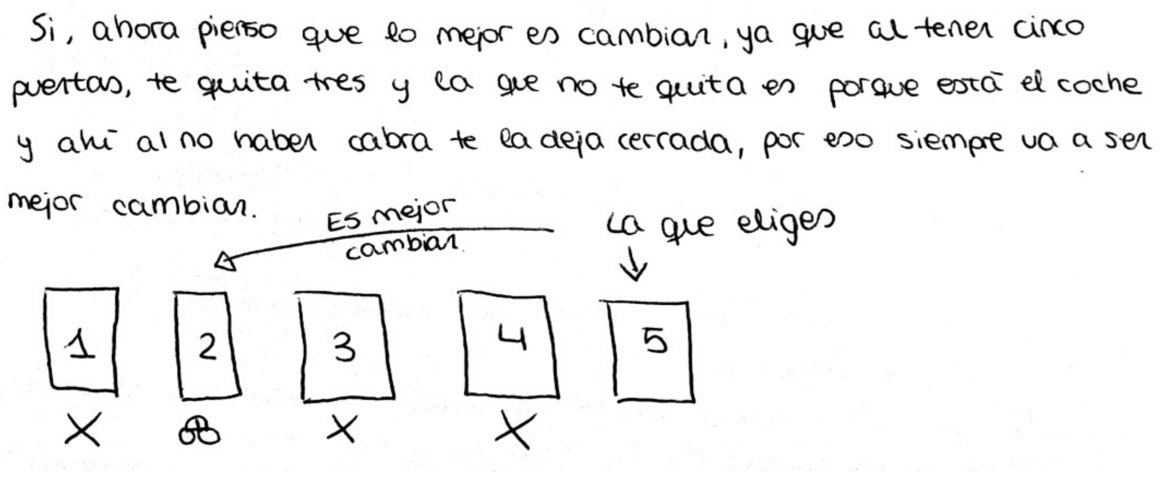


Figura 33. Respuesta de un alumno 4A19 tras la comparación de resultados con los compañeros

Otras de las respuestas de alumnos que sí han cambiado de opinión han sido: "*Sí, he cambiado de opinión, porque he llegado a la conclusión de que cambiar es porque hay más posibilidades de ganar siempre que el número de puertas sea mayor que 2. Las probabilidades son del 50%*" (alumno 4C1), "*Yo he cambiado de opinión y me he dado cuenta que no siempre es la opción acertada la primera que tomamos, y al ver a mis* *compañeros cambiando siempre y ganando, me ha hecho cambiar de opinión*” (Alumno 4C7), “ *He cambiado de idea. Es mejor cambiar, porque es muy difícil elegir el coche a la primera*”(4A11) y por último, “*Inicialmente había elegido cambiar mi opinión simplemente porque no confío en mi intuición. Pero después de escuchar el razonamiento de mi compañera 4A3 estoy completamente de acuerdo. Y añadiendo mi razonamiento de cuantas más puertas haya cambiado tienes muchísimas posibilidades*” (4A4). Vemos como en el caso de los alumnos que cambian de opinión, su elección inicial era la de mantener y modifican su elección a cambiar, como mejor opción para la resolución de la paradoja. A diferencia de aquellos que mantienen su elección inicial, que es la de mantener la puerta escogida al principio del juego.

Como consecuencia de realizar este experimento hemos podido comprobar la influencia de las creencias y la intuición en la respuesta de los alumnos. Nos encontramos con respuestas de los estudiantes como las siguientes: “*No he seguido ninguna estrategia, lo único que he hecho ha sido nunca escoger el mismo número dos veces seguidas*” (Alumno 4C10). Otros afirman escoger su número favorito, como el caso del alumno 4C18 o el alumno 4C19: “*decir mi número favorito, que este caso es el 2*”. Así como otros argumentan que “*Yo creo que es mejor mantenerse en la elección inicial por que suele ser una intuición y es mejor no dudar*” (Alumno 4C7). Algunos incluso desconfían del presentador y basan en ello sus decisiones: “*No hacer caso al presentador porque puede que escojas la puerta correcta y él te haga cambiarla para no ganar el premio*” (Alumno 4A1), considerando por tanto, que mantener tu puerta inicial es la mejor de las opciones. Podemos ver como en todos estos casos en los que los alumnos se dejan llevar por la intuición, la opción que toman es la de mantener la puerta que eligen inicialmente.

El uso de la paradoja para la comprensión de los conceptos probabilísticos es otros de los objetivos específicos marcados que se han quedado fuera de nuestro alcance ya que, a pesar de dar la solución al final de cada sesión explicando los conceptos matemáticos que se encuentran detrás, no hemos podido comprobar con posterioridad si esos conceptos han sido adquiridos por parte los alumnos y si el uso de la paradoja ha ayudado a este propósito.

Por último, pretendíamos con esta investigación ver como la manera en la que los estudiantes expresaban sus respuestas tenían relación con las mismas.

5.2. Cuestiones de investigación

Por otro lado, nos planteamos una serie de cuestiones de investigación, y que han sido influyentes en los resultados obtenidos en el aula. El lenguaje utilizado por parte del docente en el aula, el cual no es el mismo en todas ellas, ya que tras realizar el taller en cada clase se perciben sensaciones de cómo los alumnos han asimilado la actividad y se realizan modificaciones con respecto a las siguientes, simplemente en gestos o información que los estudiantes demanden. Esto se debe a que las necesidades de todos los grupos no son iguales, se trata de grupos heterogéneos, que presentan dificultades en diferentes puntos y cuya actitud hacia la materia es diferente, como quedó recogido en el diario (Anexo III). Además, en la primera de las sesiones tuvimos un problema con el video de introducción que explicaba la paradoja luego dicha explicación fue realizada por la docente. La forma de expresión, y el hecho de contar la paradoja sin ningún medio audiovisual que lo soporte, le resta vistosidad y atención por parte de los alumnos teniendo esto efecto en las respuestas de los alumnos, como se puede ver el grupo B es aquel donde más respuestas en relación al azar y donde menos argumentaciones formales se realiza. Así, a la vista de los resultados que hemos obtenido, en este grupo encontramos una mayor número de alumnos cuya respuesta se encuentra basada en el la incertidumbre y la simulación, quizás provocado por el lenguaje de la docente en la explicación de misma y que pudiera dejar entrever que el azar se encontraba tras la respuesta a la paradoja. También en este grupo, muchos alumnos se decantaron por la simulación y las respuestas basadas en la contingencia, respuestas que como vemos en los grupos A y C no se dan con tanta importancia en ninguna de las etapas. Para una mejor visualización de estos datos, hemos incluido en el Anexo IV, la evolución de las respuestas de cada uno de los grupos a lo largo de las tres etapas, y que corrobora lo afirmado con anterioridad. Si bien es cierto que con los instrumentos utilizados no podemos concluir que exista una relación directa entre ambos, luego se abre en este punto una vía de estudio futura.

Como también comentamos en el diario, la actitud de los diferentes grupos es distinta, aunque todos ellos cursan matemáticas académicas, no todos pretenden estudiar una carrera técnica donde las Matemáticas jueguen un papel importante, el profesor de Matemáticas ya me comentó que en concreto el grupo B no presentaba en general un gran interés hacía ninguna de las actividades planteadas ni hacia la materia en sí, como sí ocurría en el resto de grupos, esto se ha visto reflejado en los resultados como se ha comentado anteriormente, pues la poca motivación hacía la actividad, repercutió en la falta de participación cuando se requería y por lo tanto, la no simulación suficiente con el atrezo que no les permitió sacar otras conclusiones al respecto, obteniéndose respuestas más superficiales y poco profundas. De modo que la situación que se daba en el aula repercute en los resultados que se han obtenido. Haciendo un análisis de esta cuestión de investigación planteada, y de nuevo en referencia a los diagramas del Anexo IV en relación a las respuestas proporcionadas por los alumnos, es cierto que en los grupos A y C, se observa como la participación y el interés en dichos grupos es mayor, sobre todo en el grupo de 4ºE.S.O C el cuál se corresponde con un curso con alumnos cuyo perfil es científico en relación con el resto de materias que cursan. De ahí que, las respuestas más interesantes, en general, se hayan dado en este curso como hemos visto anteriormente y donde la relación con el alumnado fue más estrecha pues su actitud hacia la actividad lo permitía, como hemos recogido en el diario.

También nos preguntábamos a cerca de las ventajas y desventajas que el llevar la probabilidad condicionada al aula en forma de simulación en una aplicación, y posteriormente en el aula han tenido en la respuesta de los estudiantes. Hay que tener en cuenta que las elecciones realizadas por los estudiantes no eran las mismas y el tiempo que se ha invertido en realizar la simulación a través del atrezo, ha sido, por cuestiones relacionadas con el ritmo del aula distinta en cada uno de los grupos. Esto nos ha llevado a tener en unos grupos un mayor número de simulaciones que otros, lo cual tiene una repercusión directa en la respuesta de los estudiantes. Este es uno de los motivos por los que sacar conclusiones en conjunto, puede llevar a error, ya que las condiciones en las que se ha realizado el experimento, aunque se ha intentado que los tiempos fueran lo más parecido posibles, no ha podido realizarse así, ya que fueron modificados en función de la demanda de los alumnos de cada grupo. También el llevar la actividad como paradoja presenta limitaciones en su aplicación en el aula y tienen repercusión en los datos que hemos obtenido. Por un lado, la simulación a partir de la aplicación da una autonomía al estudiante a la hora de poder repetir el experimento tantas veces como quiera y tomando las decisiones que desee, sin embargo, es necesario que estas sean posteriormente contrastadas con otros alumnos para obtener distintos puntos de vista, motivo por el cual dentro de la primera etapa hay una parte de debate en grupo. Incluso en muchas ocasiones lleva a los estudiantes a dar respuestas basadas en dicha simulación como hemos podido comprobar con todos aquellos estudiantes que han basado su razonamiento en ello, como se pudo ver en la figura. Por su parte, la simulación en clase capta totalmente la atención del alumnado, se trata de una simulación conjunta donde las diferentes decisiones de los alumnos les permite discutir y sacar conclusiones de manera grupal, una de las principales ventajas es que, al ser el alumno partícipe total de la actividad la motivación hacia la actividad y su atención a la misma es mayor que con la aplicación planteada.

5.3. Tendencias de pensamiento

A la luz de las tendencias establecidas por Cardeñoso (2001) podemos clasificar las respuestas de los alumnos en función de las diferentes tendencias presentadas: Tendencia Determinista, Tendencia de Cuasalidad, Tendencia Personalista, Tendencia de incertidumbre y Tendencia Contigente. Además vamos a identificar los errores que Contreras (2011) establece como los más comunes en el desarrollo de esta paradoja, y que hemos tenido en cuenta también en la elaboración del sistema de categorías.

Para la primera de ellas, en la Tendencia Determinista se corresponderá con aquellos estudiantes que no consideran la paradoja algo aleatorio, sino que realizan el cálculo de probabilidades apropiada para llegar a una conclusión correcta. Se encontrarían en este grupo todos los estudiantes que dan una solución basada en la regla de Laplace. En ocasiones, como la del alumno que se muestra, encontramos errores de razonamiento que Contreras (2011) relaciona con una incorrecta asignación inicial de probabilidades (p.300) y que tiene relación con una errónea aplicación de la regla de la suma ya que existe una falsa descomposición de los espacios muéstrales de los diferentes sucesos que intervienen en el experimento (Contreras, 2011, p.300). En nuestro caso, en la primera etapa un 9.67% de los estudiantes basaron su respuesta en el cálculo de probabilidades. En la segunda etapa, lo hicieron un 32.25% y en la tercera un 27.2%. Se puede ver en la respuesta del alumno 4B16: "*tienes que cambiarlo porque así tienes más probabilidades de que te toque el coche, si tú eliges la del coche hay 1 probabilidad entre 3 de que te toque el coche, mientras que si eliges una cabra te van a quitar la otra cabra. Por lo que si eliges una de las dos te toca el coche, con una probabilidad de 2 entre 3*".

En el caso de que las soluciones vengan dadas de forma que estas estén basadas en la causalidad y en la equiprobabilidad, la Tendencia Causal recogerá a todos los alumnos que den una respuesta basada en la misma que ha sido en la primera, segunda y tercera etapa, respectivamente, de 17.74%, 30.65 % y 12.9%. Un ejemplo de este tipo de respuesta dada por el alumno 4B10 es la siguiente argumentación: "…*Me han hecho dudar y he llegado a la conclusión de que tienes al principio un 50%, ya que sabes que te van a quitar una cabra, con lo que siempre vas a acabar eligiendo entre una cabra y un coche*" en la que vemos un error dentro del espacio muestral, tal y como afirma Contreras (2011), se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada (p.282). Encajaría en esta tendencia, alumnos que dan como respuesta que: "Yo creo que es mejor no cambiar de puerta, por intuición" (Alumno 4B1), dando una argumentación causal. Como otro alumno 4B19 que da su respuesta de la siguiente forma:

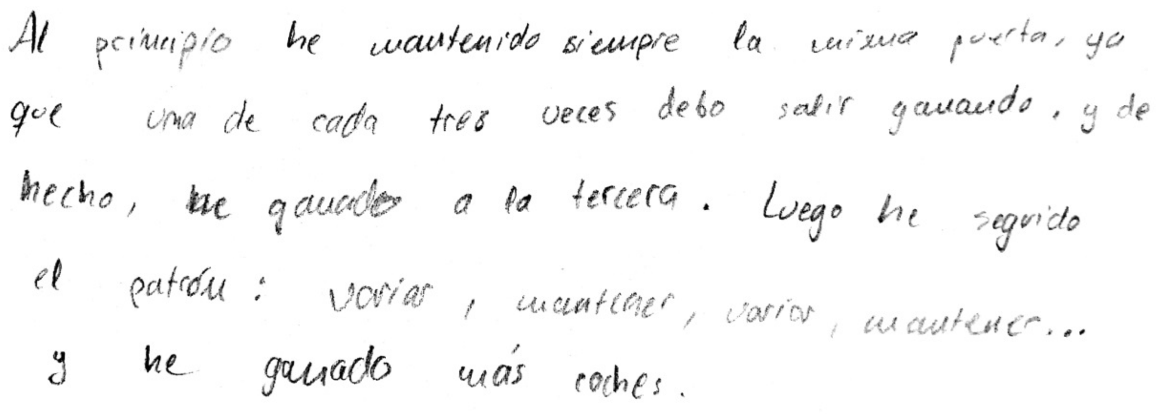

Al principio he mantenido siempre la misma puerta, ya que una de cada tres veces debo salir ganando, y de hecho, he ganado a la tercera. Luego he seguido el patrón: variar, mantener, variar, mantener... y he ganado más coches.

Figura 34. Respuesta causal del alumno 4B19 en la primera etapa

Por su parte, en el caso de la Tendencia Personalista incluimos las respuestas basadas en el azar, en la "*falacia del eje temporal*" y en las dadas según "l*a ley de los pequeños números*". En esta tendencia se encuentra los razonamientos que Contreras (2011) incluye dentro de los errores relacionados con una mala percepción de la independencia. Los estudiantes consideran sucesos independientes el suceso de elegir la puerta inicialmente y el suceso de la puerta que abre el locutor. De ese modo, en las tres etapas de manera respectiva, las soluciones basadas en esta concepción dadas han sido del 41.93%, 16.13% y 25.8%. Encontramos sobre las respuestas basadas en la incertidumbre algunas como la siguiente: "*Elegir una puerta al azar y después cambiar de elección*" (Alumno 4C6).

Pero también otras, relacionadas con la "*ley de los pequeños números*", como la afirmación del alumno 4C5, "*No tengo estrategia, siempre que no cambio me sale una cabra. Por eso creo que hay que cambiar para que te salga el coche*". Se encuentra relacionado con un razonamiento erróneo basado en la interpretación incorrecta de la convergencia, ya que como afirma Contreras (2011), la convergencia delas frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos (p.300), como es el caso de las simulaciones que realizan nuestros estudiantes.

La Tendencia Incertidumbre la asociamos con las respuestas basadas en la simulación cuyos resultados en función de la respuestas de los alumnos han sido de 24.2%, 12.9% y 1.61 %. Pertenecerían a esta tendencia respuestas como la siguiente: "*la estrategia es cambiar de puerta, ya que después de repetirlo he cambiado de opinión. He observado que se obtienen mejores resultados*" (Alumno 4A19).

Por último, la Tendencia Contingente, no se corresponde con ninguna de las respuestas dadas en general sino con la respuesta de la subcategoría considerada en las respuestas dadas según la Regla de Laplace y que por lo tanto viene dado por 3.22%, 19.35% y 9.67%. Como podemos observar en la *Figura 28.*

A modo de resumen presentamos la siguiente tabla.

Tabla 9. *Porcentajes de las concepciones en base a las soluciones del alumnado*

Concepción	*1º etapa*	*2º etapa*	*3º etapa*
Tendencia Determinista	9.67%	32.25%	27.2%
Tendencia Causalidad	17.74%	30.65 %	30.65 %
Tendencia Personalista	41.93%	16.13%	25.8%
Tendencia Incertidumbre	24.2%,	12.9%	1.61 %.
Tendencia Contingente	3.22%	19.35%	9.67%

Fuente: Elaboración propia

Finalmente en relación a lo citado por Cardeñoso *et al.*, (2017) en el capítulo sobre fundamentación teórica, existía en sus estudios una relación entre la equiprobabilidad y las tendencias deterministas e incertidumbre, donde se encontraban los porcentajes de mayor respuesta a base a dicha equiprobabilidad. En nuestro caso, la categoría relacionada con la equiprobabilidad, se encuentra divida en dos subcategorías, relacionadas con errores dentro del espacio muestral y una incorrecta asignación de probabilidades. De ese modo, y prestando atención a lo desarrollado en este apartado, vemos que existe una relación con aquella tendencia determinista, en la que se produce errores con los experimentos y el espacio muestral, y donde se producen, de entre el resto de tendencias los porcentajes más altos, sobre todo en la segunda y tercera etapa. Si bien por otro lado, si fijamos nuestra atención en la tendencia incertidumbre, estos porcentajes de alumnos con argumentos donde la equiprobabilidad se encuentra detrás no son tan altos. Destacar como el porcentaje más alto se encuentra en la tendencia personalista, que guardaba relación con la “*falacia eje temporal*” y por tanto, con incorrectas concepciones dentro del espacio muestral y que tienen su efecto en la equiprobabilidad que Cardeñoso *et al.*, (2017) comentaba en su artículo, luego los resultados obtenidos guardan relación en cierto modo.

5.4. Conclusiones de investigación

Por último, vamos a realizar una comparación de los resultados que hemos obtenido respecto a otros trabajos realizados para el estudio de la probabilidad condicionada, como vimos en la sección 5 del primer capítulo de este trabajo.

Uno de los estudios es el realizado por Fernandes, Correia & Contreras (2013) con alumnos de 9 años, a partir del cual se pretendía realizar un estudio de la probabilidad condicionada y conjunta, y la influencia que una tiene en la otra. En la parte que nos ocupa, la probabilidad condicionada, se destaca como error más frecuente la confusión entre experimentos compuestos y simples. En nuestro caso, se ha visto reflejado en aquellos alumnos que han proporcionado soluciones en las que el espacio muestral era incorrecto. Si bien es cierto, que no ha sido el error más común que se nos ha presentado en nuestro caso, ya que en los tres grupo-clase el porcentaje de alumnos que argumentaba bajo esta solución se encontraba entre un 7% y un 15%.

Otro estudio realizado sobre probabilidad condicionada e independencia es el de Fernandes, Nascimento, Cunha & Contreras (2011), donde hacen un estudio desde la etapa preescolar hasta estudio posteriores. Las conclusiones obtenidas al respecto fueron una mayor rigurosidad en las respuestas, tal y como hemos obtenido por nuestra parte en alumnos de secundaria, ya que en la mayoría de las ocasiones los alumnos aplicaban la regla de Laplace de manera implícita al realizar su razonamientos. En este trabajo, se destacan los razonamientos erróneos basados en la "*falacia eje temporal*". Éste es otro de los errores comunes que hemos encontrado en nuestros resultados pero que al igual que ocurría con el caso anterior, no supone un gran porcentaje dentro de los errores más comunes que nuestros estudiantes han cometido en sus argumentos, haciendo etapas y cursos en los que no aparece. A modo de conclusión, los autores consideran que desde edades tempranas se proporciona una visión determinista en los alumnos y esto tiene repercusión en la etapa secundaria como podemos ver en la tabla 9, esta es una de las concepciones que en nuestro estudio hemos obtenido un porcentaje significativo de alumnos que la poseen.

Por su parte, Huerta & Arnau (2017), a partir de una serie de problemas, llegan a la conclusión de que los resultados obtenidos en estudiantes se deben a una mala interpretación del contexto y de los datos del problema, y que en menor medida por una falta de conocimientos previos. Haciendo una comparación con nuestro estudio, esto se refleja en alumnos que argumentan basándose de nuevo en la "*falacia eje temporal*", y en relación que esta guarda con la probabilidad conjunta, tal y como indican Huerta & Arnau (2017).

El estudio realizado con profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, realizado por Batanero, Contreras & Díaz (2014), arroja unos resultados que en nuestro caso no podemos comparar con nuestros alumnos por no ser comparable la formación de unos y otros, pero que sí refleja la necesidad de una formación mayor de los profesores en el ámbito de la probabilidad condicionada y conjunta, ya que en los resultados obtenidos eran frecuente los alumnos que confundían ambas y proporcionaban respuesta erróneas. Y que confirma la necesidad que reflejábamos en la sección 1 del capítulo 1 de este trabajo.

En el estudio que realizaron Díaz, Batanero & Contreras (2010), trabajaron con estudiantes de Psicología y con estudiantes de Magisterio, haciendo una comparación entre los resultados obtenidos en función de cuatro sesgos establecidos y que guardan relación con los que han aparecido en nuestro desarrollo de la paradoja. En el trabajo se deja ver como ambos grupos de estudiantes no son capaces de proporcionar una definición de probabilidad condicionada y presenta errores en sus argumentos como los de nuestros alumnos de secundaria en relación a la causalidad, temporalidad y el condicionamiento de sucesos, que hemos podido comprobar en los razonamientos basados en respuestas causales, o aquellos en los que no se tiene en cuenta la puerta que abre el presentador de nuestra paradoja y que influye en el experimento. De nuevo Díaz, Batanero & Contreras, (2010) afirman que, "La creencia de que un suceso que ocurre después del que juzgamos no puede afectar a la probabilidad del primero se conoce como falacia del eje temporal" (p.7), donde nuevo dicha falacia se encuentra entre los errores de los razonamientos que se dan cuando entra en juego la probabilidad condicionada, como hemos podido comprobar.

Sin embargo, el análisis más exhaustivo sobre la concepción de probabilidad condicionada es al que realiza Contreras (2011) en su tesis doctoral, en la que analiza tanto a los futuros docentes de educación primaria como secundaria y cuyos resultados son parecidos a los obtenidos por Díaz, Batanero & Contreras,(2010).

Así, como hemos podido comprobar la probabilidad condicionada supone una fuente de error en todas etapas educativas, desde preescolar hasta incluso a futuros docentes. Las diferentes maneras a bordarlos y presentarlo, puede dar diferentes resultados, como los que se han obtenido en los estudios analizados anteriormente. Por ello, en el caso de presentarlo en forma de paradoja, dichos errores en los argumentos se encuentran presentes, puesto que la probabilidad condicionada se encuentra implícita en ella. Los resultados que hemos obtenido guardan relación con los de estos estudios, pues la tendencia Personalista, es junto con la Causal y la Determinista, aquellas que cobran más fuerza en nuestro resultados. Recordamos que la primera guardaba relación con la "*falacia eje temporal*" y la "*ley de los pequeños números*", la segunda con la causalidad y la tercera, con argumentaciones relacionadas con el espacio muestral. Y como hemos podido comprobar se trata de las dificultades encontradas en estudio realizados previamente.

Otras dificultades que nos ha surgido, pueden estar relacionadas con la propia naturaleza de la paradoja, como es la tendencia Incertidumbre, relacionada con la simulación, y que en otro tipo de actividades no podría haberse dado lugar, y la tendencia Contingente, relacionada con la aplicación de la misma al cálculo de probabilidades, y que su error puede estar asociado con la formación del alumnado escasa en este ámbito, pero que a la luz de los resultados y con los instrumentos utilizados, no podemos afirmar y sería una posible vía de investigación futura.

Para finalizar, los estudios que hemos presentado se basan en el estudio de la probabilidad condicionada a partir de otro tipo de problemas, y no mediante el uso de paradojas, como la presentada; sin embargo, hemos podido ver como los resultados en las tendencias de pensamiento que hemos obtenido son similares a las que hemos obtenido en nuestra investigación. Esto nos hace pensar en la generalización de este tipo de pensamiento, argumentos y errores detectados y una necesidad educativa en torno a la probabilidad condicionada.

6. Conclusiones para la formación continuada

En este trabajo hemos recogido las percepciones de alumnos de 4º E.S.O a cerca de la probabilidad condicionada. Esta investigación además de todos los propósitos y objetivos marcados y analizados con anterioridad, surge como motivación hacia el campo de la incertidumbre. Ha sido planteado como un proceso de diferentes etapas en las que el alumno conocía algo más la situación en cada una de ellas. De manera similar es el recorrido que de manera personal he realizado desde el comienzo del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatorio, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Comencé con una primera etapa donde se nos proporcionaban los conocimientos básicos entorno a la Educación, así como los conocimientos en Psicología que era necesario para el trato con adolescentes. En esa etapa inicial o de presentación, al igual que la presentada a nuestros alumnos en el portafolio, me ha sustentado de referentes teóricos que me ha permitido el desarrollo de mi aprendizaje y por lo tanto, se ha visto reflejado en este trabajo.

Más en profundidad una primera etapa estaba relacionada con la materia que nos atañe, las Matemáticas, donde diferentes materias cursadas me han proporcionado las herramientas y la guía a seguir en esta investigación, y que han sido aplicadas en la misma. Todo ello, llevado a cabo en una segunda etapa y puesta en práctica, tal y como los alumnos han hecho con sus aplicaciones me han hecho consolidar todo el aprendizaje y me han ayudado a establecer el tipo de metodología y forma en la que quiero impartir mis clases en un futuro y que se ha visto reflejado en la intervención en el aula realizada.

Una última etapa de análisis de resultados, de evaluación del proceso y de reflexión del trabajo realizado, algo que he aprendido en el trascurso del máster y que he aplicado en la elaboración de esta investigación realizando una valoración de la situaciones que se han presentado a lo largo de la misma, de los resultados obtenidos y su posterior análisis y que han surgido de ese proceso que se lleva a cabo en enseñanza y que culmina con la evaluación, evaluación como algo mucho más que una calificación, sino como una adquisición de conocimientos y de logro por parte del alumnado.

Este proceso análogo a las etapas presentadas a los estudiantes y que en mi caso ha acabado por la vía de la investigación, surge ante la observación durante el periodo de Prácticas. En él, pude comprobar como los temas relacionados con esta rama de las Matemáticas no eran considerados de importancia o simplemente se obviaban. Debido a la importancia que personalmente considero que esta tiene en la vida diaria, esta investigación me ha servido para intentar hacer un acercamiento de conceptos probabilísticos a estudiantes cuyos conocimientos al respecto son nulos. El uso de diferentes técnicas con el grupo clase en cuanto a formas de trabajo, y provocando la reflexión y el debate continuo entre los estudiantes, son consecuencia del proceso de madurez como futura docente que he vivido en los meses de duración del máster. El poder prestar atención a detalles que han sucedido en el aula, como los recogidos en el diario, son de nuevo una consecuencia del conocimiento sobre ellos que tengo, como es el caso de la disposición de las mesas en el aula, las metodologías usadas en la actividad, el lenguaje utilizado, la diversidad que podemos encontrar en la misma, la motivación del alumnado hacía el taller, entre otros. Saber manejar la situación es algo que la experiencia hará que mejore con el paso del tiempo en mi futura práctica como docente, pero que sin duda he sabido manejar debido a mi formación previa.

Braslavsky y Birgin, 1992, en Aguilar, Mazzitelli, Chacoma & Aparicio, 2011, establecen tres tipos de saberes que un docente debe poseer, y son:

- Un saber sustantivo: comprende el dominio de una disciplina, es decir, es el campo de su formación inicial y supone el conocimiento de la estructura epistemológica de ese campo del saber, los ejes conceptuales, los modos de producción y divulgación, etc.
- Un saber pedagógico: supone el encuentro entre los significados subjetivos de los docentes y el conocimiento científico, los modos de apropiación y transposición didáctica del conocimiento, la comprensión del sujeto que aprende, la dinámica áulica y el conocimiento del entorno socio cultural.
- Un saber institucional: las instituciones proveen un marco regulatorio de las actividades que se desarrollan en su seno. En su práctica escolar, los docentes se apropian de los saberes relacionados con la historia de la escuela, el contexto social, económico, político, cultural y comunitario que caracterizan esas instituciones y las diferencian de otras. (p.6)

A partir de ellos, podemos hacer un análisis de los que he adquirido durante el Máster tanto a partir de las asignaturas como en el periodo de Prácticas como en la elaboración de este trabajo de investigación. Es cierto que, la formación no es completa y que son muchas las carencias que se pueden encontrar en mí como docente, en cuanto el saber sustantivo, la formación epistemológica ha sido fundamental y de gran ayuda a la hora de desarrollar las diferentes actividades y en la elaboración de la intervención en el aula para este trabajo, conocer métodos de divulgación, y metodología ha sido importante y muy fructífera dentro de las asignaturas realizadas.

La parte de la cual me encuentro más carente es la relacionada con el saber pedagógico. Han sido muchos los conceptos que en las diferentes asignaturas nos han destacado, pero que, bajo mi punto de vista se quedaban bajo una formación meramente teórica. Esto ha hecho que no supiera como actuar en ciertas ocasiones en el aula, sobre todo en relación en el trato con los estudiantes. Por último, el saber institucional ha sido también desarrollado durante el periodo de Práctica, es cierto que debido al corto periodo de tiempo de las mismas, no es posible conocer el funcionamiento de un centro ni todas las obligaciones de un docente por completo, pero si permite una visión aproximada. Y es ese otro de los puntos que hubieran mejorado la formación, un mayor tiempo en el periodo de Prácticas, para poder poner en juego todo lo visto a nivel teórico. Considero que la formación aunque no completa es suficiente para dar los primeros pasos en la docencia, donde muchas de las competencias que se deben tener vienen posteriormente dada por formación extraordinaria a través d cursos y de la propia experiencia que se vaya desarrollando a lo largo del tiempo, y cuya base se encuentra en los conocimientos aportados por el máster realizado. Así, de cara a la actividad desarrollada en este trabajo, la formación previa ha sido fundamental, tanto para la elaboración de la metodología, la secuenciación, así como el uso de herramientas y técnicas para captar la motivación y de los alumnos y plantear una actividad atractiva para los alumnos pero que a la vez se llevaran algo aprendido de la misma. La reflexión el análisis y la depuración de información, así con una evaluación posterior, han sido pasos que he aprendido a llevar a cabo en el Máster que son fundamentales en educación y que se han aplicado a esta investigación, con el objetivo de cumplir los objetivos propuestos para la misma. Ha sido una experiencia fantástica el poder haber tenido la oportunidad de volver al aula, además con alumnos que había impartido mi unidad didáctica, y poder ver que la actividad le haya gustado como me comentó una alumna de 4ºC, "*me ha gustado mucho el juego, se agradece estás cosas porque me ha hecho pensar pero me lo pasado muy también*", algo que como futura docente reconforta y es agradable oír, tras el trabajo realizado detrás de todo ello.

A modo de conclusión, considero que la aportación del Máster es muy necesaria, para llegar a ser un buen docente en el futuro. Considero que son necesarios los conceptos que se presentes en la parte común del Máster, ya que te aporta una visión y profundiza en conceptos que desde fuera de la profesión no son conocidos y que de cara a las prácticas se requieren para el manejo de diferentes situaciones dentro del centro. Si es cierto que, como he comentado, la parte de formación psicológica de la cual carecemos cuando comenzamos el

Máster me parece algo escasa en relación a la importancia que esta tiene dentro de la docencia. De igual forma, el bloque específico de dicho Máster es el que más me ha aportado, puesto que me ha hecho ver mi materia desde otro punto de vista y me ha proporcionado diferentes herramientas para llevar las Matemáticas la todos los alumnos de la mejor manera posible y adecuándose a sus necesidades, una de las motivaciones que me hacen amar esta profesión y que pretendo mejorar, el poder quitar el miedo que muchos estudiantes presentan hacia esta materia, llegado incluso crear una motivación hacia ella y que puedan apreciarla.

7. Referencias

Agnelli, H., & Peparelli, S. (2011). Las paradojas, un vehículo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad. *Revista de Educación Matemática*. *26*, 1-12

Aguilar, S. B., Mazzitelli, C. A., Chacoma, M. S., & Aparicio, M. T. (2011). Saberes del docente y representaciones sociales: implicancias para la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista Electrónica" Actualidades Investigativas en Educación"*, *11*(2), 1-28.

Alsina, Á., & Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *Suma*, *56*, 23-31.

Azcarate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado*, *32*, 129-142.

Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema, Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 789-810.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? A*merican Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM

Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 37-54.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimaraes, H. (Eds.), APM. Atas Provisórias do XXVII Sem. Investigaçao em Educaçao Matemática. *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.* Porto, pp 9-21.

Batanero, C., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.

Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2014). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. Revista digital Matemática, Educación e Internet 12(2). http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C & Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, *261*, 78-84.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores Defining probability and conditional probability: A study with prospective teachers. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(1), 75-91.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Cañadas, G. R. (2014). Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty Hall problem. T. Wassong et al. (Hrsg.). In *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen–Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 363-376). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6 (2), 5-23.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Cardeñoso, J. M. (2001). Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. *de Publicaciones de la Univ. de Cádiz*.

Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. (2004). Las concepciones de los profesores de Primaria ante el conocimiento probabilístico: implicaciones para su formación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, *17*, 11-35.

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E. Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*. *11*, 145 – 166.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2008). Modeling and simulations in statistics education. *Proceedings of the ICMI Study*, *18*.

Contreras, J. M., Batanero, C., & Fernández, J. A. (2010). Problema de Monty Hall. Un análisis semiótico. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Contreras, J. M., Batanero, C., Fernandes, J. A., & Ojeda, M. M. (2010). Análisis de una experiencia de formación de profesores en diferentes contextos. In *Actas de las XXXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las VI Jornadas de Estadística Pública*. 28(78), 1-11.

Contreras García, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Granada: Universidad de Granada.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., & Cañadas, G. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. *REVEMAT*, 8 (1), 75-91.

Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2013). Caracterização das intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. *III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 47-68). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Consultado em março 11 del 2012, http://hdl.handle.net/1822/23124

De Guzmán, M. (2007). Y la matemática. *Revista iberoamericana de educación*, *43*, 19-58.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación,* 38 (4), 1-12.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Díaz, C., & de la Fuente, E. I. (2005). Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada. *Biaix*, (*24)*, 85-91.

Díaz, C., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *26* (2), 149-162.

Echeita, G. & Sandoval, M (2011) Claves de la equidad como reto de la educación del siglo XXI (pp.7-19) En José Moya y Florencio Luengo (cood). *La inclusión en la Educación democrática*. Madrid, IFIE

Edo, P. (2014). *Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel* (Tesis doctoral). Universitat de València

Escrich, S. G., Gigante, B. G., & García, M. G. (2015). The Monty Hall Game: una propuesta de Mobile Learning para el aprendizaje de la probabilidad. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, (32), 1-12.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds). *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, British.

Falk, R., & Konold, C. (Eds.). (1992). The psychology of learning probability. *Statistics for the twenty-first century*, 151-164.

Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica (Pre-service primary school teachers difficultis in stochastics). In Actas do *V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM), Porto (Portugal): Faculdade de Ciências [CD].

Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. D. C., & Contreras, J. M. (Eds.). (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12º ano através do ensino. In *XIII Conferência Interamericana De Educação Matemática*. Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. 1-13.

Fernandes, J.A., Correia, P.F., & Contreras, J.M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (4), 5-26.

Font, C. M., Badia, M. C., I Muntada, M. C., Muñoz, M. P., & Cabaní, M. L. P. (1994). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje: Formación del profesorado y aplicación en la escuela* (Vol. 112). Grao.Barcelona, España.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284.

Inzunsa Cazares, Santiago, & Guzmán Reyes, Martha Catalina. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática*, *23* (1), 63-95. Recuperado en 19 de enero de 2018, dehttp://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000100004&lng=es&tlng=.

Konold, C. (1994). Teaching Probability through Modeling Real Problems. *Mathematics Teacher, 87* (4), 232-235.

Lecoutre, M., & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19* (3), 357-368.

Lesser, L. (1998). Countering indifference using counterintuitive examples. *Teaching statistics, 20* (1), 10-12.

Marín, M. (1999). Internet: Herramienta didáctica en las aulas. *Educación y Medios, 9*, 18-22.

Martínez, P. F. (1999). Paradojas matemáticas para la formación de profesores. *Suma*, 31, 27-35.

Mieles, M. M. B. (2012). Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios, 10* (2), 7-19.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-García, F. (2014). El pensamiento probabilístico de los profesores de biología en formación. *Bolema, Boletim de Educação Matemática*, *28* (50). 1415-1442. Recuperado de: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/7338/6503.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-García, F. (2014). Los significados de la probabilidad en los profesores de matemática en formación: un análisis desde la teoría de los modelos mentales. *Actas de la XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Osorio Angarita, M. A., Suárez Parra, A., & Uribe Sandoval, C. C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (38), 127- 142.

Huerta, M.P., & Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (11), 87-106.

Pierce, R., & Chick, H. (Eds.). (2011). Teachers' beliefs about statistics education. In *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). Springer Netherlands.

Polaki, M.V. (2005). Dealing with compound events. Em G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). Nova Iorque: Springer.

Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, J.

Kilpatrick y L. Rico (Eds.), *Educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamericano. Bogotá.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. (2005). Las concepciones deterministas, un obstáculo para el desarrollo profesional del docente en el campo probabilística. In *Actas del V Cibem. Congreso Ibero-Americano de Educaçao Matemática* (pp. 12-14).

Serrano, L., Ortiz, J. J., & Rodríguez, J. D. (Eds.). (2009). La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*. Universidad de Granada. Granada, España. 157 – 178.

Tomlinson, C. (Ed.). (2005). El fundamento de la enseñanza diferenciada en aulas con estudiantes con habilidades diversas. *Estrategias para trabajar con la diversidad en el aula*. Paidós. Buenos Aires, Argentina. 35-37.

Trevethan, H. M., YumiKataoka, V., & Oliveira, M. S. (2010). El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico. *Revista Iberoamericana de Educación matemática*, (69), 19-33.

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista Ema*, *4* (1), 15-31.

Watzlawick, P., Helmick, J., & Jackson, D. (1981). *Teoría de la Comunicación. Interacciones, patologías y paradojas.* Editorial Herder. Barcelona.

8. Anexos

Anexo I

Incluimos algunas capturas de la aplicación en Geogebra usada por los alumnos en el desarrollo de la actividad.

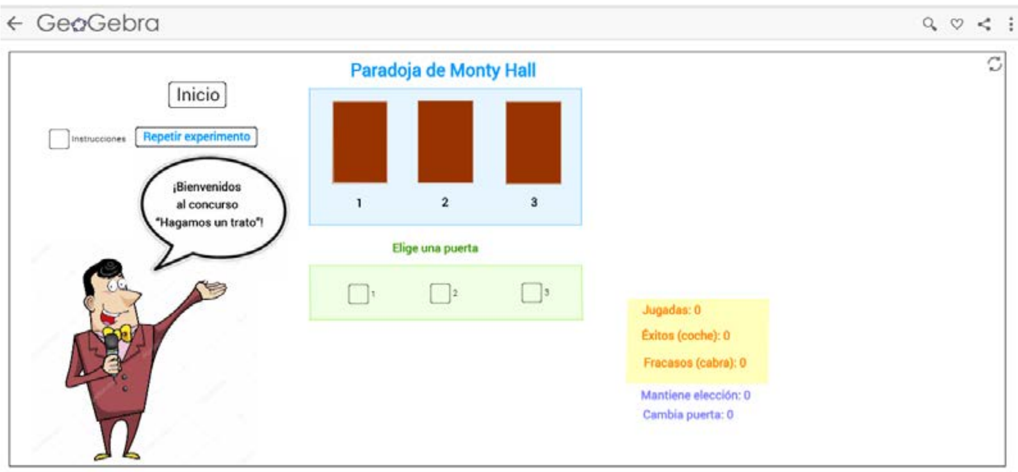


Figura 35. Vista general de la aplicación en Geogebra

En la siguiente captura se muestra la aplicación una vez seleccionada una de las puertas.

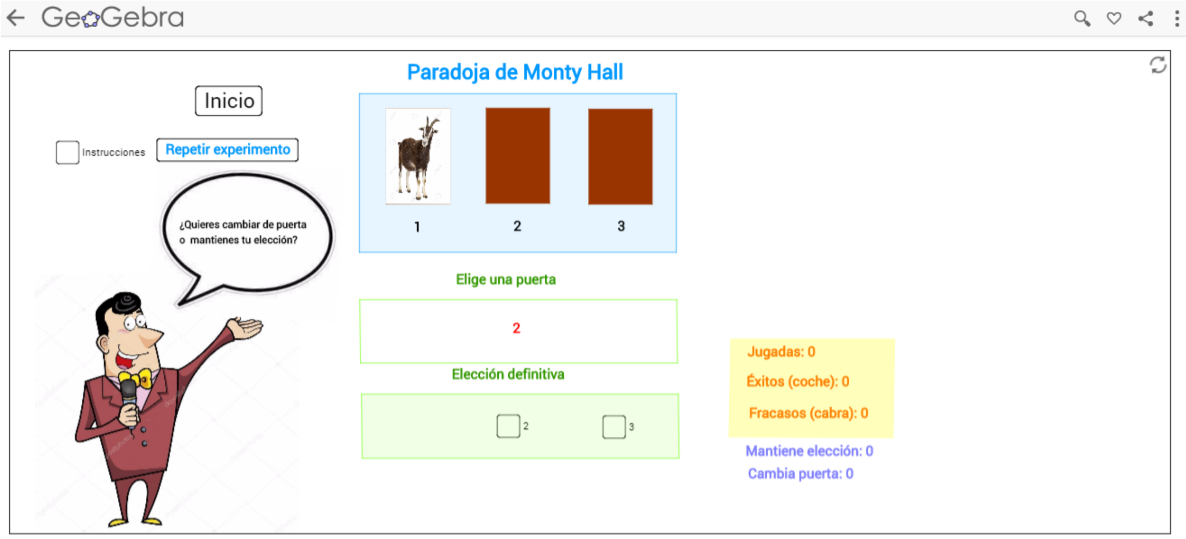


Figura 36. Vista de la aplicación en Geogebra tras la primera elección

En la imagen 3, se observa el uso del botón "Instrucciones" del que pueden hacer uso los alumnos en caso de duda sobre la actividad.

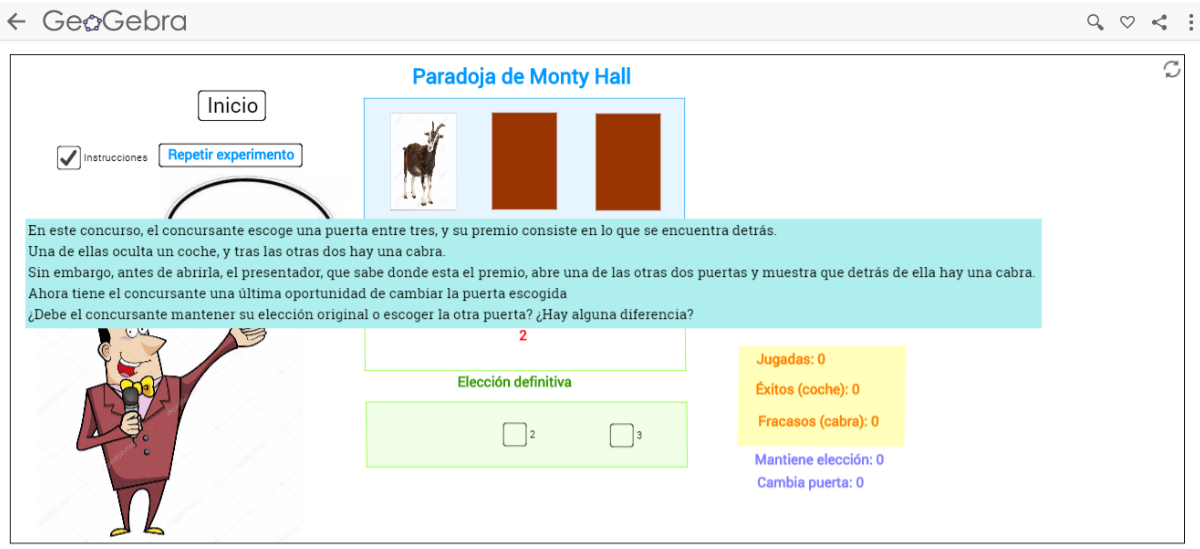


Figura 37. Visión de la aplicación en Geogebra son el botón "instrucciones" activado

Anexo II

En este Anexo II, incluimos el portafolio proporcionado a los alumnos para realizar la actividad y donde queda recogida toda su evolución a través de la misma.

PORTAFOLIO INDIVIDUAL SOBRE LA PARADOJA DE *"MONTY HALL"*

Nombre ________________________

Clase ________________________

Fecha ________________________

El portafolio que te presentamos forma parte de una investigación sobre el conocimiento probabilístico de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria y formará parte del trabajo de fin de Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Gracias por tu participación.

ETAPA DE PRESENTACIÓN

Explica, con tus palabras, la temática de la actividad. Indica en qué consiste el problema, con qué parte de las matemáticas está relacionado, cuál es la pregunta a la que hay que dar respuesta,… ¿Cuál es tu primera respuesta a la pregunta que aparece en el video? ¿Cambiarías de puerta o mantendrías tu elección inicial?

PRIMERA ETAPA: Simulación con Geogebra

Antes de comenzar, utiliza el código QR que aparece en la primera página de este documento para acceder a la aplicación de Geogebra. Posteriormente, simula la paradoja atendiendo a las siguientes instrucciones:

- Lee atentamente el problema.
- Realiza el experimento y repítelo tantas veces como sea necesario.
- Contesta a las siguientes preguntas.
- *Recomendación*: haz uso de los contadores que aparecen en la aplicación.

Ahora, por favor, contesta de manera **individual** a estas preguntas:

1. ¿Es mejor cambiar de puerta, o mantener tu elección inicial?
   (Rodea con un círculo la opción que consideres correcta)

Cambiar	Mantener

   1.1. ¿Importa eso? Razona tu respuesta.

2. ¿Cuántas veces has realizado el experimento?	
2.1. ¿Cuántos éxitos has conseguido?	
2.2. ¿Cuántos fracasos?	
2.3. ¿Cuántas veces has mantenido tu elección inicial?	
2.4. ¿Cuántas has cambiado?	

3. ¿Cuál es tu estrategia para conseguir el premio? Explica el razonamiento que has seguido para llegar a ella. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

Comparación de resultados con los compañeros

Ahora compara los resultados de la etapa anterior con los compañeros de tu grupo.

Después contesta **razonadamente**:

¿Ha cambiado tu conclusión anterior respecto a la solución al problema? Si es así, explica por qué. En caso de que tu conclusión sea la misma que en la etapa anterior, ¿Cuáles son los argumentos que has aportado a tus compañeros para defender tu postura?

SEGUNDA ETAPA: Caso con 4 y 5 puertas

A continuación, vamos a realizar la paradoja para el caso en el que tengamos 4 puertas. Posteriormente lo simularemos para el caso de 5 puertas. Después, contesta a las siguientes preguntas.

En el caso de **cuatro** puertas:

1. ¿Influye el número de puertas en tu elección inicial? Razona tu respuesta.

2. ¿Cuándo el presentador abre las puertas, es mejor cambiar o mantener tu elección? Razona tu respuesta.

3. ¿Influye el número de puertas, en este caso cuatro, en cambiar o mantener tu elección inicial? Razona tu respuesta.

4. ¿Qué sigue siendo mejor, cambiar de puerta, o mantener tu elección inicial?
(Rodea con un círculo la opción que consideres correcta)

Cambiar	Mantener

5. Ha cambiado tu opinión respecto a la primera etapa. Explica el la nueva solución al problema. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

En el caso de **cinco** puertas, contesta:

1. ¿Influye el número de puertas en tu elección inicial? Razona tu respuesta.

2. ¿Cuándo el presentador abre las puertas, es mejor cambiar o mantener tu elección? Razona tu respuesta.

3. ¿Influye el número de puertas, en este caso cinco, en cambiar o mantener tu elección inicial? Razona tu respuesta.

4. ¿Qué sigue siendo mejor, cambiar de puerta, o mantener tu elección inicial?

Cambiar	Mantener

(Rodea con un círculo la opción que consideres correcta)

5. Ha cambiado tu opinión respecto a la parte anterior. Explica el la nueva solución al problema. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

TERCERA ETAPA: Generalización

Después de simular la paradoja con tres, cuatro y cinco puertas, intenta generalizar el problema para un número mayor de puertas. Para ello, contesta:

1. Si tuviéramos 100 puertas, ¿sería mejor mantener o cambiar de puerta? (Rodea con un círculo la respuesta correcta)

Cambiar	Mantener

2. ¿Influiría que el presentador abriera puertas donde no está el premio, como en los casos anteriores? Razona tu respuesta.

3. ¿Cuál sería la estrategia para ganar el premio si tuviéramos 100 puertas? Explica tu respuesta. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

4. Y en el caso de que tuviéramos n puertas, ¿harías el mismo razonamiento? Explica tu respuesta. (Nota: puedes usar algún esquema, diagrama o dibujo que te ayude a explicar tu estrategia.)

Anexo III

En este Anexo se encuentra el diario realizado durante la intervención en cada una de las aulas del centro, con el objetivo de recoger datos relevantes para la investigación. Se desglosa en tres puntos correspondientes cada uno de ellos con cada uno de los grupos con los que se trabajó la actividad, correspondiente a los cursos de 4º de E.S.O. En este diario se recogen testimonios de los alumnos, dificultades y otros hechos de relevancia en el desarrollo de la actividad en el aula.

- 4º E.S.O B: La actividad con el curso de 4º de E.S.O B tuvo lugar el día 6 de noviembre de 2017. Esta aula con 21 alumnos, de los cuales 13 eran de sexo masculino y 8 de sexo femenino. La disposición de la clase era por parejas y cursan la asignatura de Matemáticas Académicas, aunque dentro de un perfil de Ciencias Sociales con respecto al resto de asignaturas que cursan durante el año. Esto provoca que los alumnos no muestren especial interés, en general, por la asignatura de Matemáticas. Durante la práctica en este aula, este hecho se vió reflejado en la falta de participación por parte de los alumnos en la actividad, tanto en el uso de la aplicación en Geogebra, como en la parte de simulación de la aplicación en el aula a través del atrezo presentado. Las etapas se realizaron sin ningún problema, salvo la primera donde no se pudo proyectar el video preparado para la actividad, por un problema en la conexión a internet del centro, lo cual se solucionó explicando la paradoja por parte de la docente. Al finalizar de las etapas, se realizó un sondeo para conocer la respuesta a la pregunta: ¿quién considera que conseguir el premio es totalmente aleatorio y que por lo tanto, cambiar o mantener no influye en tu elección?, a la que respondieron 12 alumnos respondieron que era todo fruto del azar. Posteriormente, se volvió a preguntar a los alumnos si era mejor opción mantener tu elección o cambiar, tal y como preguntábamos inicialmente, y 14 alumnos respondieron que era mejor opción mantener. Tras ello se procedió a dar la solución de la paradoja. Primero con el caso de 3 puertas, y posteriormente con el caso de 5 puertas, donde muchos alumnos comprendieron mejor dicha solución. Se expuso también el caso de 100 puertas, para un alumno que con las explicaciones anteriores, no comprendía la solución al problema y que tras llevarlo a un caso exagerado acabó comprendiendo lo que se entrañaba detrás.

  Algunos de los problemas que surgieron en el desarrollo de la clase, fue que algunos alumnos no contaban con el móvil, hecho que fue solucionado haciendo que esos estudiantes se pusieran con un compañero y fuera simulando la paradoja de manera independiente y sacando sus propias conclusiones.

En cuanto a los argumentos que durante el trascurso de la misma, los alumnos hacían, la mayoría estaban relacionados con su intuición, el “azar”, y la “aleatoriedad”, estando la mayoría de ellos carentes de conceptos probabilísticos.

Es importante destacar la conversación entre dos alumnos en la etapa en primera, donde debían discutir con el resto de compañeros y donde se intentaban convencer mutuamente de sus decisiones, se veía claro cómo uno de ellos daba un razonamiento basado una mala concepción del espacio muestral en el juego pues afirmaba que: “si se abre una puerta donde hay cabra la posibilidad de que detrás de tu puerta se encuentre el coche es 50%”

- 4º E.S.O C.

  En este curos el número de alumnos es de 22. En el trascurso de la actividad con este curso, los pasos que se siguieron fueron los mismos que con el anterior. Esta clase, con un perfil más científico, hizo que la participación fuera total. Todos los alumnos mostraban gran interés por intentar dar solución al problema, algo que favoreció que se llegará a conclusiones por parte de muchos de ellos con un carácter más matemático.

  El problema de que algunos alumnos no dispusieran de teléfono móvil se solucionó igual que en el caso anterior. En este caso tan sólo dos alumnos consideraban que la solución a la paradoja fuera el azar y el 70% de los estudiantes llegaron a la conclusión de que era mejor opción cambiar de puerta, aunque en muchas ocasiones no subieran dar la explicación más formal. En las preguntas que la docente realizaba tras realizar todas las etapas y dar solución final al problema en términos de probabilidades, se realizó también la referida a la independencia del número de puertas en el desarrollo de la actividad, para la que la división de opiniones en grupo provocó un nuevo debate.

  En general, fue un grupo donde se llegó a conclusiones rápidamente y donde los conceptos matemáticos relacionados con la Probabilidad comenzaron a florecer. En una de las discusiones que dos estudiantes tuvieron, se podía ver como la dificultad del error muestral se encontraba en la argumentación de uno de ellos, siendo esta rebatida por su compañero, creando un debate , que posteriormente pude apreciar en el resto de parejas del aula.

Si es cierto que en la asignación de probabilidades, aunque la realizaron correctamente, no conocían el hecho de la suma de las probabilidades debe ser 1, probablemente por el simple hecho de su bajo conocimiento en esta rama de las matemáticas.

Uno de los alumnos dio rápidamente con la solución y en la explicación final fue él, el que la mostró al resto de compañeros.

Al igual que en la clase anterior, los alumnos comprendían mejor la solución del problema con un número mayor de puertas. Y cinco alumnos consiguieron proporcionarme en diferentes debates con ellos la solución para el caso de n puertas, o un caso extremo de puertas.

Finalmente, muchos alumnos me reportaron que les había encantado la actividad, que se habían divertido mucho y que era de agradecer este tipo de actividades en clase de Matemáticas pues les había hecho razonar pero a la vez pasárselo bien.

- 4º E.S.O A.

  Este curso de 20 alumnos, de entre los cuales 7 son de sexo masculino y 13 de sexo femenino. Aunque el día que tuvo lugar el taller sobre la paradoja, un alumno no ha asistido al centro, luego consideraremos que el grupo está conformado por 19 estudiantes. En este curso la disposición de los alumnos era diferentes, el profesor de matemáticas, y tutor del curso, ha realizado una disposición de los alumnos en grupos de 4, con el fin de que se realicen más debates y discusiones entre ellos. Estos se hizo ver en el desarrollo de la actividad, ya que de los tres grupos fue en el que se realizó una mayor discusión de las diferentes preguntas en el portafolio. Esto al igual que en el curso de 4º E.S.O C provocó que la conclusión de cambiar de puerta fuera razonada por muchos alumnos en las primeras etapas de la actividad. La participación del grupo fue muy alta como en el curso de 4º E.S.O C, haciendo que fuera la clase donde más veces se repitiera la paradoja con el atrezo llevado al aula, algo que se hizo divertidos para los alumnos, según muchos comentaron. Las argumentaciones estaban basadas en su mayoría en probabilidad, y al igual que en las otras dos clases, en el caso de tres puertas se hablaba de probabilidad como porcentaje sin embargo, en el caso de cinco o cuatro puertas, comenzaban a darse en forma de fracción, algo inesperado.

  Tras el sondeo realizado al finalizar todas las etapas seis estudiantes consideraba que era parte del azar la solución al juego, que era algo aleatorio y que por lo tanto, no había estrategia alguna que se pudiera seguir. Por otro lado 12 alumnos consideran que la respuesta a la pregunta que se les planteaba dependía del número de puertas con las que se simulara la paradoja y fueron la gran mayoría de los alumnos, 14 en concentro, los que consiguieron exponer la solución a la misma desde una perspectiva de n puertas. Muchos de ellos también utilizaban el caso extremo de 1000 o 100 puertas para posteriormente sacar conclusiones con 5 puertas, y posteriormente con 3, es decir, realizaban el proceso inverso al que aparecían en el portafolio.

La solución al igual que en las clases anteriores, fue comprendida mejor por los estudiantes cuando se explicaba en el caso de 4 o 5 puertas, que con el caso de 3. Al igual que en 4ºE.S.O C no conocían que la suma de probabilidades debe sumar uno, sin embargo la asignación de probabilidades era correcta, pues pude escuchar algunos comentarios de alumnos como: “tienes un 33.33% de ganar el coche y un 66.66% de ganar el coche” (para el caso de 3 puertas).

Anexo IV

En este Anexo, incluimos las gráficas que comparan las respuestas de los estudiantes a lo largo de las tres etapas, a modo de resumen. Así como el de otros aspectos estudiados como la influencia del número de puertas y la forma de expresión de las respuestas de los alumnos.

En primer lugar atendemos las respuestas proporcionadas por los alumnos. Comenzamos con el curso de 4ºESO A, en el que vemos que las concepciones predominantes en la primera, segunda y tercera etapa son la simulación, las basadas en la regla de Laplace y NS/NC, respectivamente.

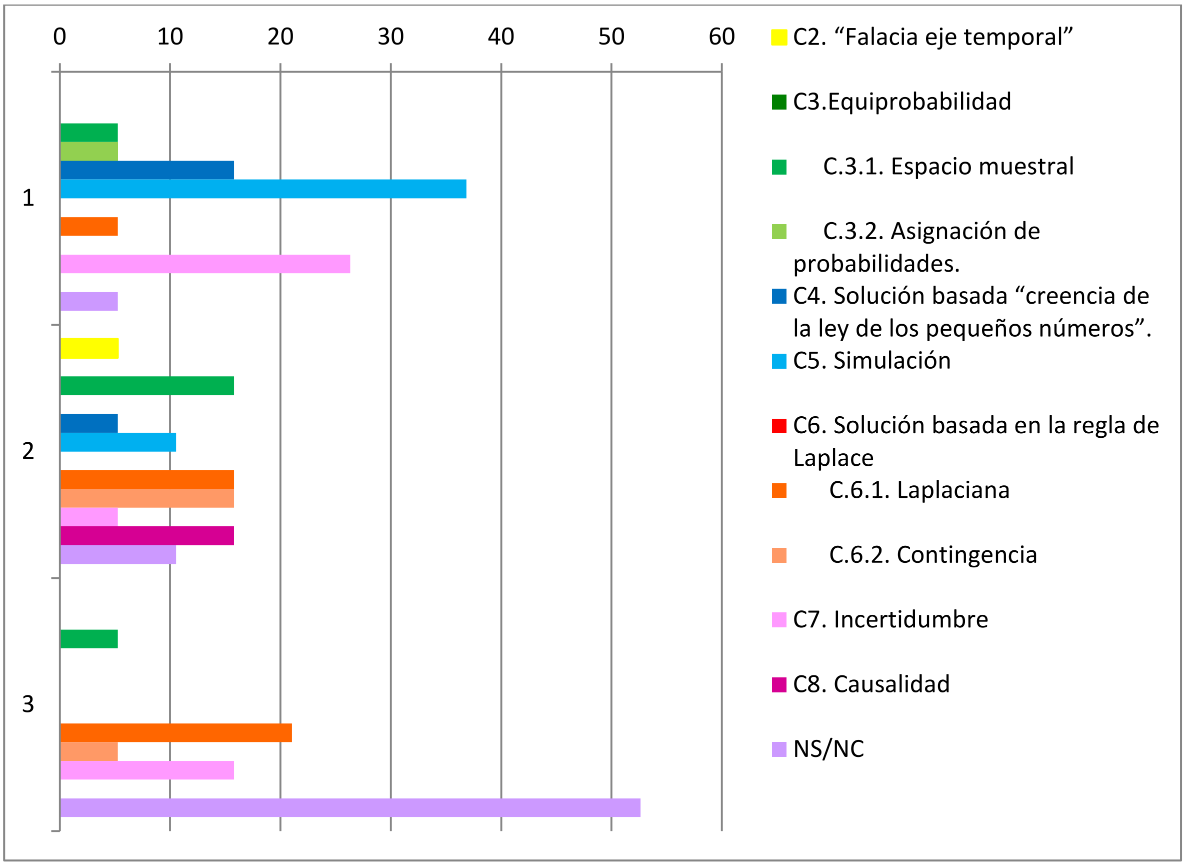


Figura 38. Comparación de respuestas en las tres etapas en 4ºA

En el caso de 4º ESO B, presentamos la misma comparativa. Observando el gráfico observamos como en la primera etapa destaca la concepción relacionada con la incertidumbre a la hora de dar respuesta a cuál es la mejor estrategia para obtener el premio. En la segunda parte del taller en el aula, vemos que destaca la concepción basada en la contingencia. Y por último, en la parte de generalización la mayoría de las respuestas se encuentran repartidas, mayoritariamente, entre aquellos alumnos que basan su respuesta en la incertidumbre y aquellos que no son capaces de proporcionar una respuesta.

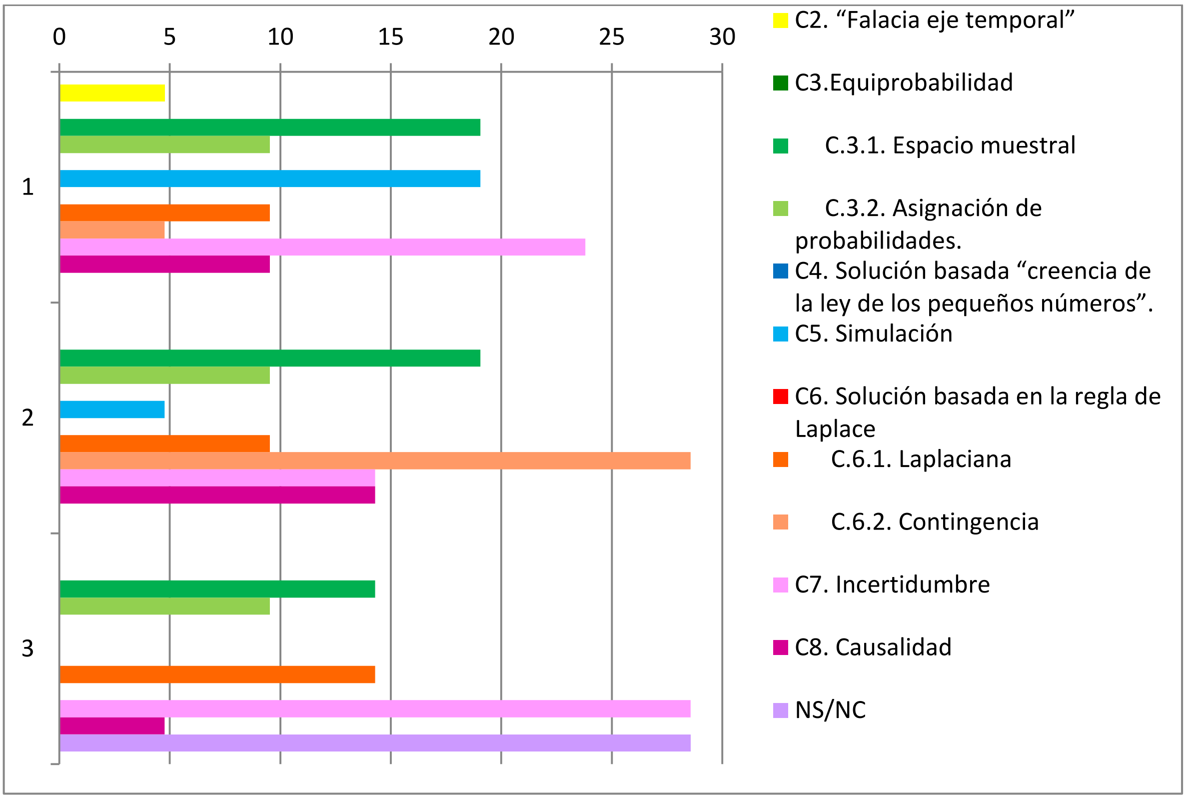


Figura 39. Comparación de respuestas en las tres etapas en 4ºB

En el caso de 4º ESO C, observamos como en la primera etapa destaca las respuestas basadas en una mala asignación de probabilidades. En la segunda etapa, estas respuestas evolucionan hacía aquellas basadas en la simulación y posteriormente en la etapa tercera se encuentran fundamentadas entre las basadas en la regla de Laplace y en la incertidumbre.

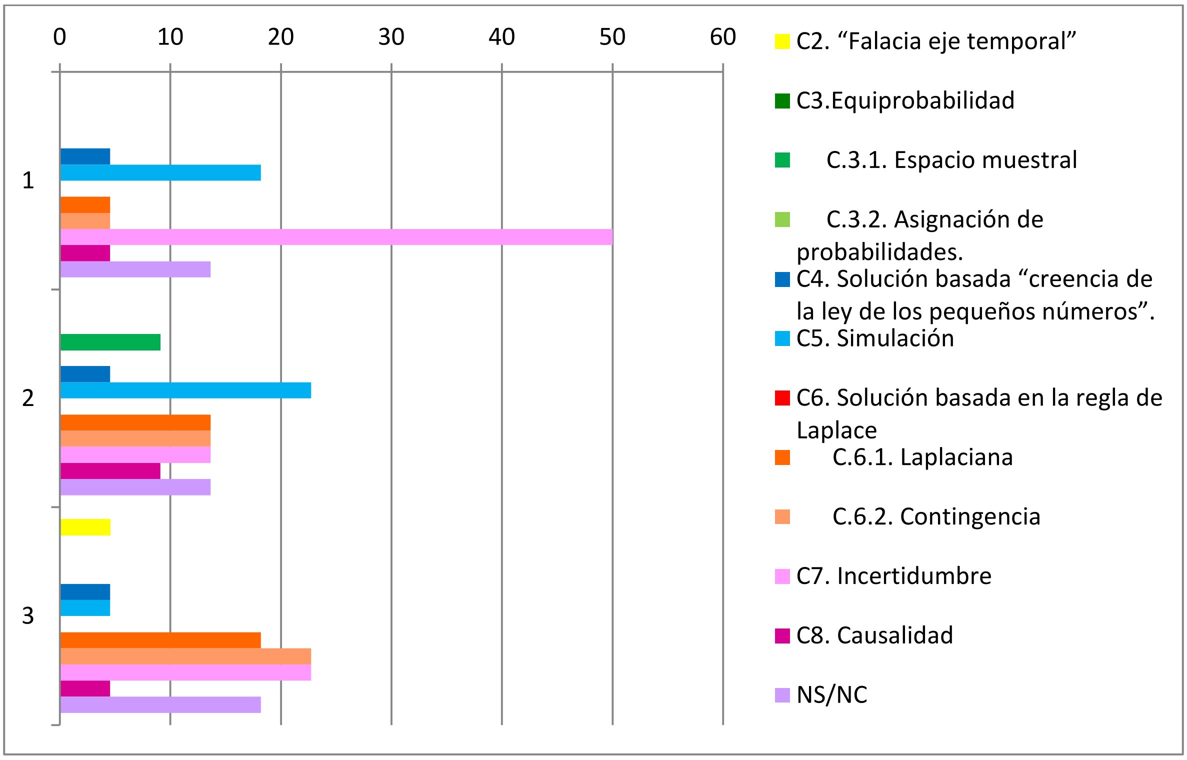


Figura 40. Comparación de respuestas en las tres etapas en 4ºC

Atendiendo a la forma de expresar las respuestas presentamos los siguientes gráficos donde se puede ver la evolución de cada uno de los grupos a lo largo de las tres etapas, en este sentido. Y como se observa, en todos los casos destacan aquellas soluciones expresadas a través de palabras y donde son pocos los alumnos que usan un lenguaje formal en la expresión de su razonamiento.

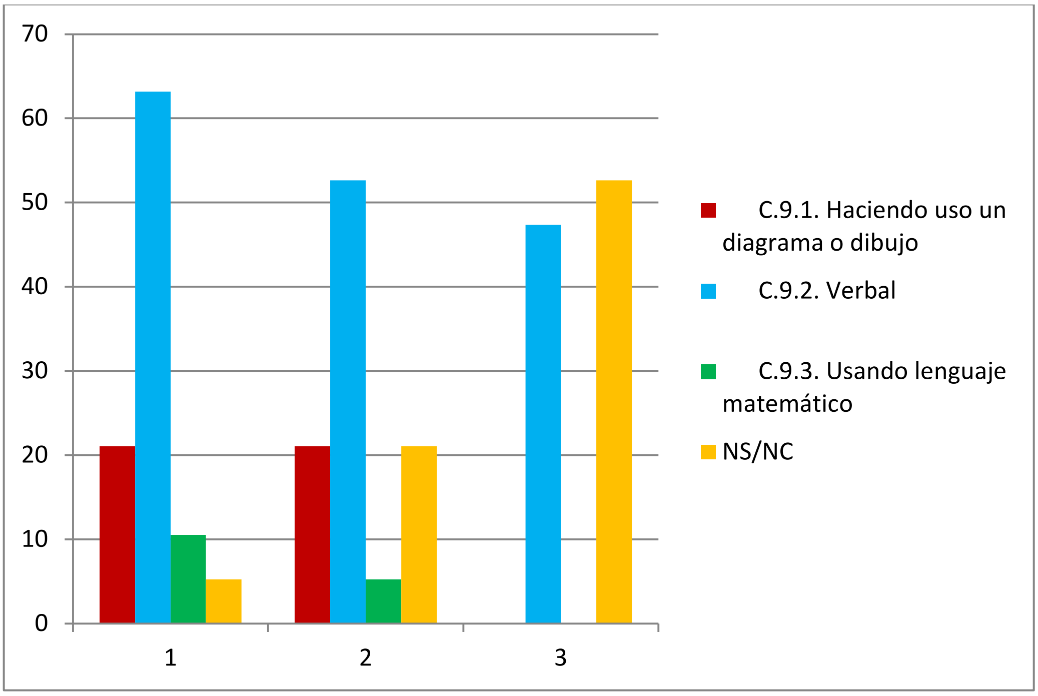


Figura 41. Comparativa expresión de soluciones en 4ºA

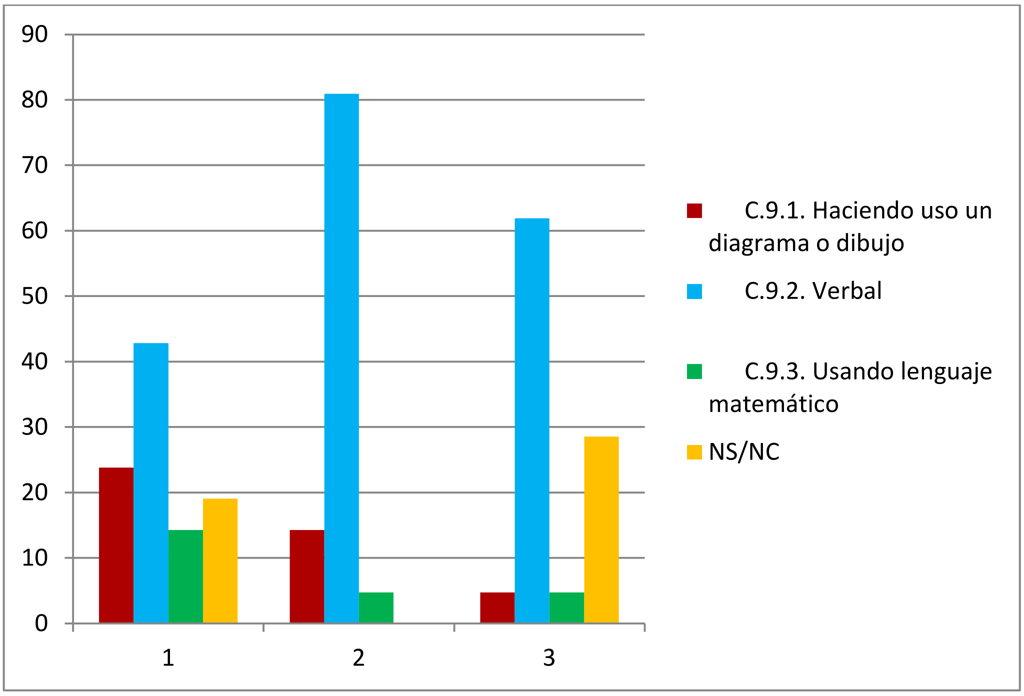


Figura 42. Comparativa expresión de soluciones en 4ºB

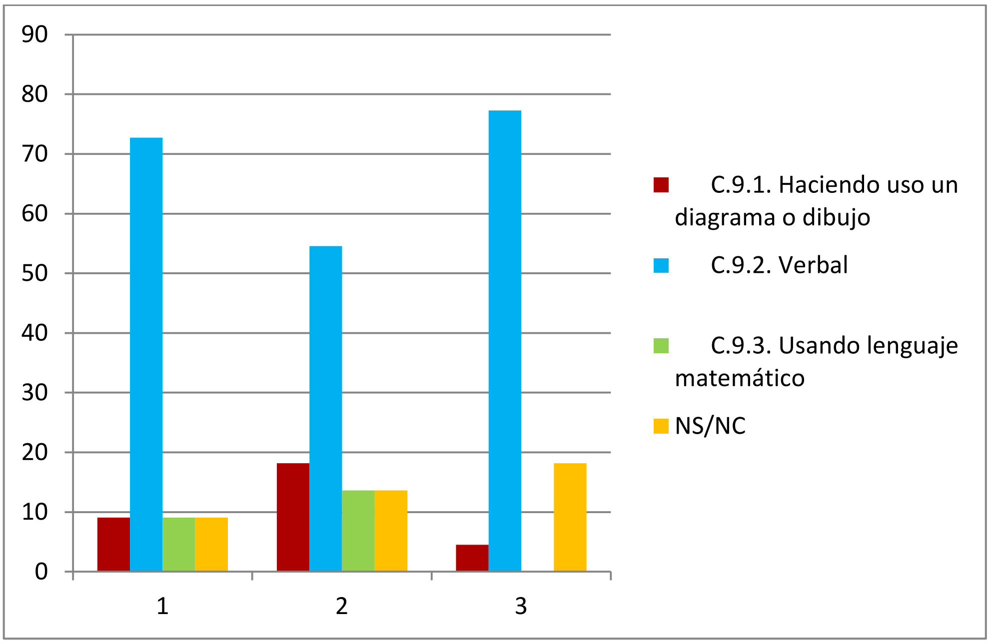


Figura 43. Comparativa expresión de soluciones en 4ºC

Por último, atendemos a la evolución de la elección final que los estudiantes realizan y cómo evoluciona la misma. En todas ellas vemos como la mayoría de los alumnos optan por la elección de cambiar de puerta, cuando el presentador se lo ofrecen. En el curso de 4ºESO A es llamativo como desde el principio los alumnos se destacan por esta opción, pero sin embargo a la hora de generalizar y encontrarse frente al caso de n casos, prefieren mantener la elección inicial, en contradicción con argumentos anteriores.

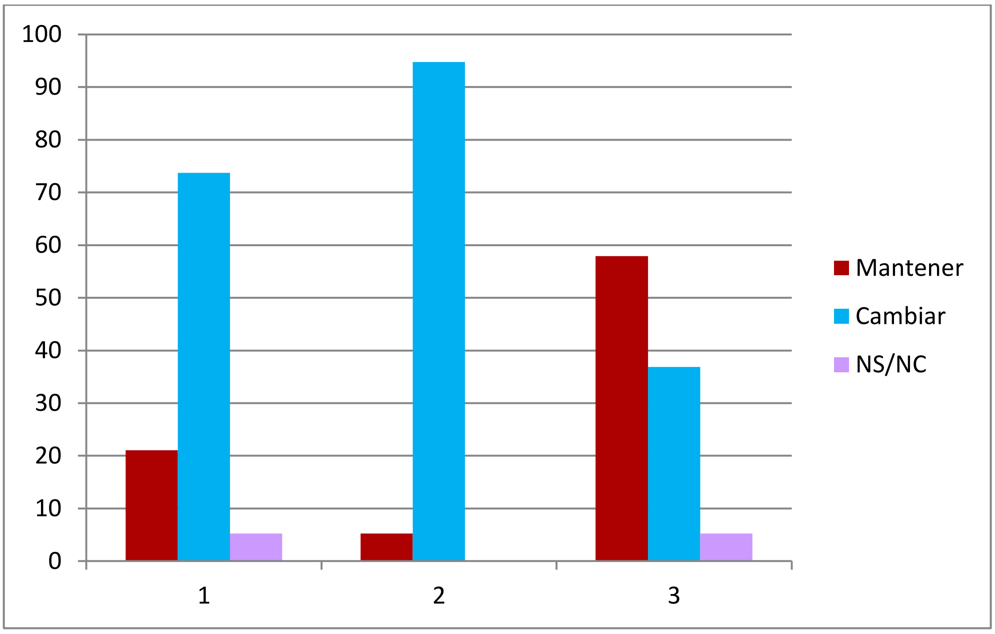


Figura 44. Comparativa elección final en 4ºA

En el caso de 4ºESO B, sucede lo mismo que en el curso anterior, pero en este caso de manera más acentuada. Además, en este curso se observa como a medida que la paradoja es simulada un trabajada un mayor número de veces en las primeras dos etapas, el número de alumnos que opta por cambiar de puerta aumenta, ante la indecisión que se muestra en la primera etapa.

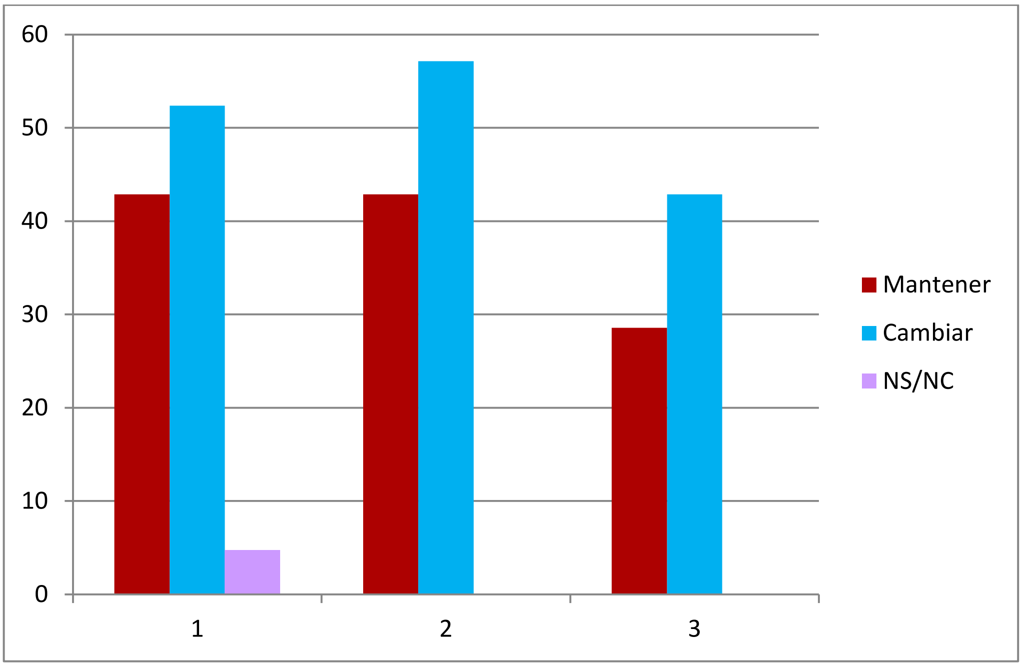


Figura 45. Comparativa elección final en 4ºB

Atendiendo al caso de 4ºESO C, de nuevo se tiene la situación de los otros grupos, de nuevo los alumnos prefieren mantener en el caso de que el número de puertas aumente.

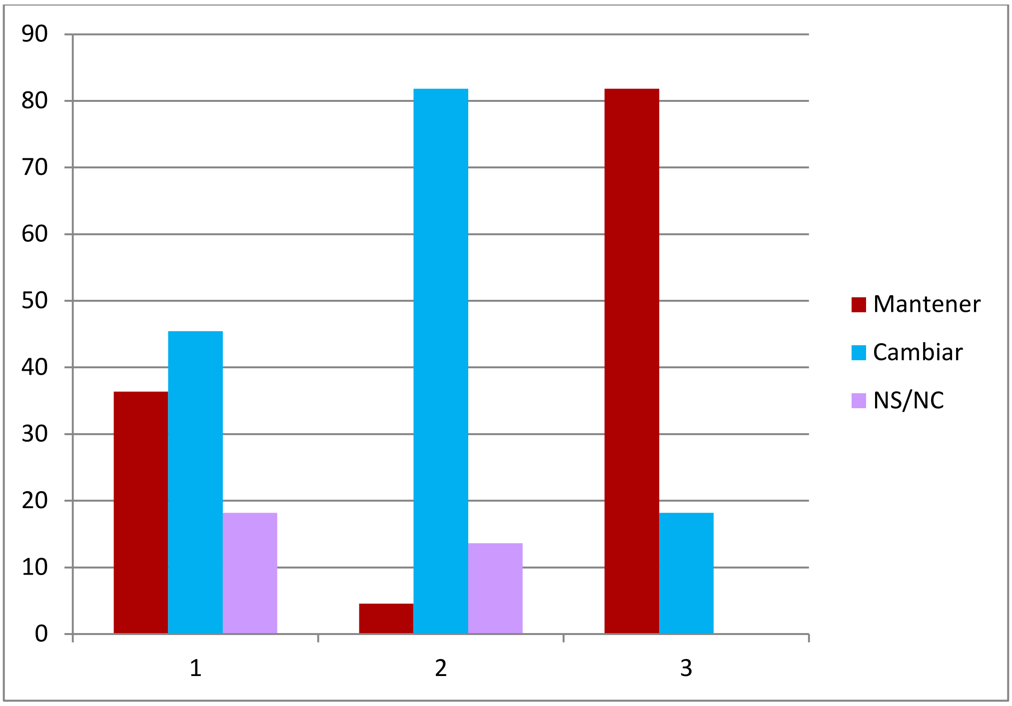


Figura 46. Comparativa elección final 4ºC

Relacionado con lo anterior, hemos visto que el número de puertas tiene influencia, por ello mostramos a continuación los resultados obtenidos en los diferentes grupos cuando le preguntamos por cómo éstas afectan en la decisión final. Así, en el gráfico circular representamos los alumnos que consideran que el número de puertas con las que se realiza la paradoja influye a la hora de elegir entre mantener o cambiar de puerta. Recordamos que el número de puertas va aumentando en cada una de las etapas, comenzando en 3, luego 4 y 5, y por último, 100 puertas y una generalización a n puertas.

En los siguientes gráficos sobre la influencia del número de puertas en cada grupo-clase, hemos destacado en rojo la primera etapa, en azul la segunda etapa y en verde la tercera etapa, atendiendo a las divisiones del portafolio.

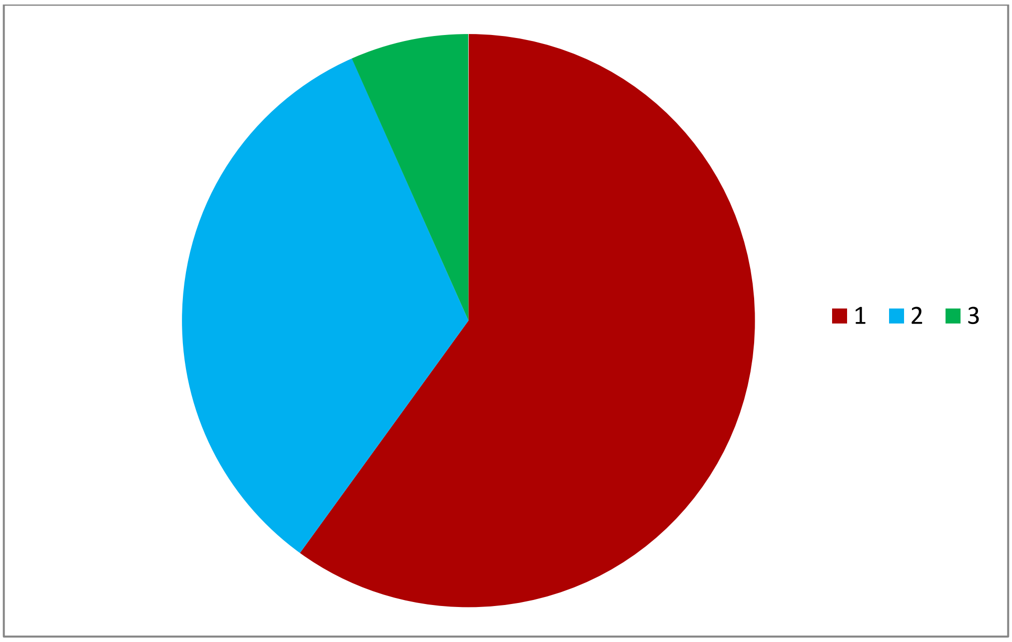


Figura 47. Influencia del número de puertas en 4ºA

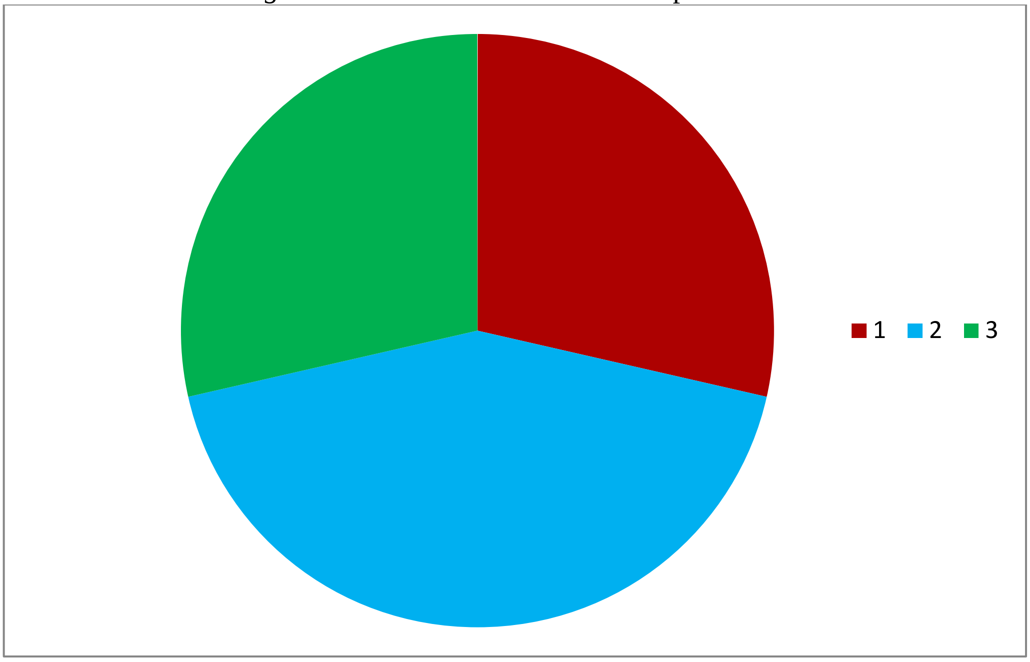


Figura 48. Influencia del número de puertas en 4ºB

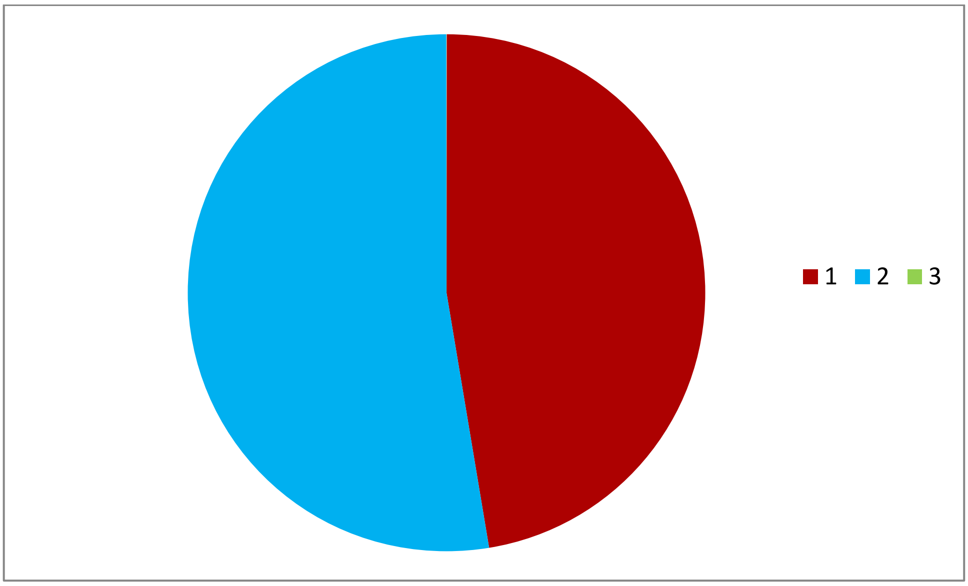


Figura 49. Influencia del número de puertas en 4ºC